Compilación OMCC

Proyecto MURO

21 de octubre de 2022

Introducción

Somos el proyecto MURO, y nuestro objetivo es conformar un Movimiento Unificador de Recursos Olímpicos.

Esta es una compilación con todos los problemas de la Olimpiada de Matemáticas de Centroamérica y el Caribe, (en un futuro agregaremos pistas y soluciones). Esperamos la disfrutes! y no dudes en compartirnos cualquier comentario o crítica constructiva.

Nos puedes contactar por aquí: proyectomuro.com.

Índice

I. Problemas

OMCC 2021

Problema 1. Una terna ordenada (p, q, r) de números primos se llama parcera si p divide $q^2 - 4$, q divide $r^2 - 4$ y r divide $p^2 - 4$. Encuentra todos las ternas parceras.

Problema 2. Sea ABC un triángulo y sea Γ su circuncírculo. Sea D un punto en AB tal que CD es paralelo a la recta tangente a Γ en A. Sea E la intersección de CD con Γ distinta de C, y F la intersección de BC con el circuncírculo de $\triangle ADC$ distinta de C. Por último, sea G la intersección de la recta AB con la bisectriz interna del $\angle DCF$.Demostrar que E, G, F y C se encuentran en la misma circunferencia.

Problema 3. En una mesa formada por 2021×2021 cuadrados unitarios, algunos cuadrados están coloreados de negro de tal manera que si colocamos un ratón en el centro de cualquier cuadrado de la mesa, éste puede caminar en línea recta (hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda o hacia la derecha a lo largo de una columna o fila) y salir de la mesa sin pisar ningún cuadrado negro (aparte del inicial si es negro). ¿Cuál es el número máximo de casillas que pueden ser de color negro?

Problema 4. Hay 2021 personas en una reunión. Se sabe que una persona de la reunión no tiene ningún amigo allí y que otra persona sólo tiene un amigo allí. Además, es cierto que, dadas cualesquiera 4 personas, al menos 2 de ellas son amigos. Demuestra que hay 2018 personas en la reunión que son todas amigas entre sí. *Nota.* Si A es amigo de B entonces B es amigo de A.

Problema 5. Sea $n \geq 3$ un número entero y $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales positivos tales que m es el menor y M el mayor de estos números. Se sabe que para cualesquiera enteros distintos $1 \leq i, j, k \leq n$, si $a_i \leq a_j \leq a_k$ entonces $a_i a_k \leq a_j^2$. Demostrar que

$$a_1 a_2 \cdots a_n \geq m^2 M^{n-2}$$

y determinar cuando la igualdad se mantiene.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea M el punto medio de AC. Se elige un punto P (distinto de B) en el segmento BC de forma que $AB = AP$. Sea D la intersección de AC con el circuncírculo del $\triangle ABP$ distinto de A, y E la intersección de PM con el circuncírculo del $\triangle ABP$ distinto de P. Sea K la intersección de las rectas AP y DE. Sea F un punto sobre BC (distinto de P) tal que $KP = KF$.Demostrar que C, D, E y F están en la misma circunferencia.

OMCC 2020

Problema 1. Un número entero positivo de cuatro dígitos se llama virtual si tiene la forma $\overline{abab}$, donde a y b son dígitos y $a \neq 0$. Por ejemplo, 2020, 2121 y 2222 son números virtuales, mientras que 2002 y 0202 no lo son. Encontrar todos los números virtuales de la forma $n^2 + 1$, para algún número entero positivo n.

Problema 2. Supongamos que tienes monedas idénticas distribuidas en varios montones con una o más monedas en cada uno de ellos. Una acción consiste en tomar dos montones, que tienen un total par de monedas entre ellos, y redistribuir sus monedas en dos montones para que terminen con el mismo número de monedas. Una distribución es *nivelable* si es posible, mediante 0 o más operaciones, acabar con todos los montones con el mismo número de monedas. Determinar todos los enteros positivos n tales que, para todos los enteros positivos k, cualquier distribución de nk monedas en n montones es nivelable.

Problema 3. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ que satisfacen la siguiente propiedad: si a, b y c son enteros tales que $a + b + c = 0$, entonces

$$f(a) + f(b) + f(c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Problema 4. Considera un triángulo ABC con $BC > AC$. La circunferencia con centro C y radio AC interseca al segmento BC en D. Sea I el incentro del triángulo ABC y Γ la circunferencia que pasa por I y es tangente a la recta CA en A. La recta AB y Γ se cruzan en un punto F con $F \neq A$. Demostrar que $BF = BD$.

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un número entero positivo y $x_1, x_2, \ldots, x_k$ números reales positivos tales que $x_1 x_2 \cdots x_k = 1$. Demuestre que

$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) \geq kP(1).$$

Problema 6. Un entero positivo N es ïnteroceánico"si su factorización prima

$$N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

satisface

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

Encuentra todos los números interoceánicos menores que 2020.

OMCC 2019

Problema 1. Sea $N = \overline{abcd}$ un número entero positivo de cuatro cifras. Nombramos *potencia plátano* al menor entero positivo $p(N) = \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ que se puede intercalar entre los números $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ de tal manera que el nuevo número $\overline{ab\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k cd}$ sea divisible por N. Determinar el valor de $p(2025)$.

Problema 2. Tenemos un polígono regular P con 2019 vértices, y en cada vértice hay una moneda. Dos jugadores Azul y Rojo se turnan alternativamente, empezando por Azul, de la siguiente manera: primero, Azul elige un triángulo con vértices en P y colorea su interior de azul, luego Rojo elige un triángulo con vértices en P y colorea su interior de rojo, de manera que los triángulos formados en cada jugada no se cruzan internamente con los triángulos coloreados anteriores. Continúan jugando hasta que no sea posible elegir otro triángulo para colorear. Entonces, un jugador gana la moneda de un vértice si coloreó la mayor cantidad de triángulos incidentes en ese vértice (si las cantidades de triángulos coloreados con azul o rojo incidentes en el vértice son iguales, entonces nadie gana esa moneda y la moneda se borra). El jugador con la mayor cantidad de monedas gana la partida. Encuentra una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

Nota. Dos triángulos pueden compartir vértices o lados.

Problema 3. Sea ABC un triángulo y Γ su circumcírculo. Sea D el pie de la altura desde A al lado BC, M y N los puntos medios de AB y AC, y Q el punto de Γ diametralmente opuesto a A. Sea E el punto medio de DQ. Demostrar que las rectas perpendiculares a EM y EN que pasan por M y N respectivamente, se encuentran en AD.

Problema 4. Sea ABC un triángulo, Γ su circuncírculo y l la tangente a Γ por A. Las alturas de B y C se prolongan y se encuentran con l en D y E, respectivamente. Las rectas DC y EB vuelven a encontrarse con Γ en P y Q, respectivamente. Demostrar que el triángulo APQ es isósceles.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos de tales que $a + b + c = 1$. Demostrar que

$$a\sqrt{a^2 + 6bc} + b\sqrt{b^2 + 6ac} + c\sqrt{c^2 + 6ab} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Problema 6. Un *triminó* es una ficha rectangular de 1×3. ¿Es posible cubrir un tablero de ajedrez de 8×8 utilizando 21 triminós, de tal manera que quede exactamente una casilla de 1×1 sin cubrir? En caso de que la respuesta sea afirmativa, determine todas las posibles ubicaciones de dicha casilla unitaria en el tablero de ajedrez.

OMCC 2018

Problema 1. Hay 2018 cartas numeradas del 1 al 2018. Los números de las cartas están visibles en todo momento. Tito y Pepe juegan a un juego. Empezando por Tito, se van turnando para agarrar las cartas hasta que terminan. Entonces cada jugador suma los números de sus cartas y gana quien tenga una suma par. Determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbela.

Problema 2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo inscrito en la circunferencia ω de centro O. Sea T la reflexión de C respecto a O y T' la reflexión de T respecto a la recta AB. La recta BT' interseca de nuevo a ω en R. La perpendicular a CT que pasa por O corta a la recta AC en L. Sea N la intersección de las rectas TR y AC. Demostrar que $\overline{CN} = 2\overline{AL}$.

Problema 3. Sean x, y números reales tales que $x - y, x^2 - y^2, x^3 - y^3$ son todos números primos. Demostrar que $x - y = 3$.

Problema 4. Determinar todas las tripletas (p, q, r) de enteros positivos, donde p, q son números primos, tales que $\frac{r^2-5q^2}{p^2-1} = 2$.

Problema 5. Sea n un número entero positivo, $1 < n < 2018$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ definimos el polinomio $S_i(x) = x^2 - 2018x + l_i$, donde $l_1, l_2, \ldots, l_n$ son enteros positivos distintos. Si el polinomio $S_1(x) + S_2(x) + \cdots + S_n(x)$ tiene al menos una raíz entera, demostrar que al menos uno de los l_i es mayor o igual que 2018.

Problema 6. En La Habana se realiza un baile con 2018 parejas. Para el baile, se dispone de una circunferencia donde inicialmente se marcan 2018 puntos distintos, etiquetados con los números $0, 1, \ldots, 2017$. Las parejas son ubicadas sobre los puntos marcados, una en cada punto. Para $i \geq 1$, se define s_i como el residuo de dividir i entre 2018 y r_i como el residuo de dividir $2i$ entre 2018. El baile comienza en el minuto 0. En el $i-$ésimo minuto después de haber inciado el baile, la pareja ubicada en el punto s_i (si la hay) se mueve al punto r_i, la pareja que ocupaba el punto r_i (si la hay) se retira, y el baile continúa con las parejas restantes. El baile termina después de 2018^2 minutos. Determine cuantas parejas quedarán al terminar el baile.

OMCC 2017

Problema 1. La figura siguiente muestra una red hexagonal formada por muchos triángulos equiláteros congruentes. Por turnos, Gabriel y Arnaldo juegan de la siguiente manera. En su turno, el jugador colorea un segmento, incluyendo los puntos extremos, siguiendo estas tres reglas: Los puntos finales deben coincidir con los vértices de los triángulos equiláteros marcados. El segmento debe estar formado por uno o varios de los lados de los triángulos. El segmento no puede contener ningún punto (puntos finales incluidos) de un segmento previamente coloreado.

Gabriel juega primero, y el jugador que no puede hacer un movimiento legal pierde. Encuentra una estrategia ganadora y descríbela.

Problema 2. Llamamos a un par (a, b) de enteros positivos, $a < 391$, "pupusa"si

$$\operatorname{lcm}(a, b) > \operatorname{lcm}(a, 391)$$

Encuentra el valor mínimo posible de b, entre todas las parejas "pupusa".

Problema 3. Sea ABC un triángulo y D el pie de la altura desde A. Sea l la recta que pasa por los puntos medios de BC y AC. E es la reflexión de D sobre l. Demostrar que el circuncentro del $\triangle ABC$ está en la recta AE.

Problema 4. ABC es un triángulo rectángulo, con $\angle ABC = 90°$. B' es la reflexión de B sobre AC. M es el punto medio de AC. Elegimos D sobre $\overline{BM}$, tal que $BD = AC$. Demostrar que $B'C$ es la bisectriz de $\angle BM'D$. NOTA: Una condición importante que no se menciona en el problema original es $AB < BC$. En caso contrario, $\angle MB'D$ no está definido o en otras palabras, $B'C$ es la bisectriz externa.

Problema 5. Susana y Brenda juegan a escribir polinomios en la pizarra. Susana empieza y juegan por turnos. En el turno preparatorio (turno 0), Susana elige un entero positivo n_0 y escribe el polinomio $P_0(x) = n_0$. En el turno 1, Brenda elige un entero positivo n_1, distinto de n_0, y escribe el polinomio

$$P_1(x) = n_1 x + P_0(x) \text{ o } P_1(x) = n_1 x - P_0(x).$$

En general, en el turno k, el jugador respectivo elige un número entero n_k, diferente de $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$, y escribe el polinomio

$$P_k(x) = n_k x^k + P_{k-1}(x) \text{ o } P_k(x) = n_k x^k - P_{k-1}(x).$$

El primer jugador que escriba un polinomio con al menos una raíz entera gana. Encuentra y describe una estrategia ganadora.

Problema 6. La rana Tita se sienta en la recta numérica. Inicialmente está en el número entero $k > 1$. Si está sentada en el número n, salta al número $f(n) + g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son, respectivamente, los números primos positivos más grandes y más pequeños que dividen a n. Encuentre todos los valores de k de manera que Tita pueda saltar a infinitos números enteros distintos.

OMCC 2016

Problema 1. Encontrar todos los enteros positivos n que tienen 4 dígitos, todos ellos cuadrados perfectos, y tales que n es divisible por 2, 3, 5 y 7.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo, Γ su circunferencia y M el punto medio de BC. Sea N un punto del arco BC de Γ que no contenga a A tal que $\angle NAC = \angle BAM$. Sea R el punto medio de AM, S el punto medio de AN y T el pie de la altitud que pasa por A. Demostrar que R, S y T son colineales.

Problema 3. El polinomio $Q(x) = x^3 - 21x + 35$ tiene tres raíces reales diferentes. Encontrar números reales a y b tales que el polinomio $x^2 + ax + b$ permute cíclicamente las raíces de Q, es decir, si r, s y t son las raíces de Q (en algún orden) entonces $P(r) = s$, $P(s) = t$ y $P(t) = r$.

Problema 4. El número 3 está escrito en un tablero. Ana y Bernardo juegan por turnos, empezando por Ana, al siguiente juego. Si el número escrito en el tablero es n, el jugador en su turno debe sustituirlo por un número entero m coprimo de n y tal que $n < m < n^2$. El primer jugador que alcance un número mayor o igual que 2016 pierde. Determinar cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y describirla.

Problema 5. Decimos que un número es irie si se puede escribir de la forma $1 + \frac{1}{k}$ para algún entero positivo k. Demostrar que todo número entero $n \geq 2$ puede escribirse como el producto de r números irie distintos para todo número entero $r \geq n - 1$.

Problema 6. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I y circuncírculo Γ. Sean $M = BI \cap \Gamma$ y $N = CI \cap \Gamma$, la recta paralela a MN por I corta a AB, AC en P y Q. Demostrar que el circunradio de $\odot(BNP)$ y $\odot(CMQ)$ son iguales.

OMCC 2015

Problema 1. Queremos escribir n números reales distintos ($n \geq 3$) en la circunferencia de un círculo de forma que cada número sea igual al producto de sus vecinos inmediatos a la izquierda y a la derecha. Determinar todos los valores de n para los que esto es posible.

Problema 2. Una sucesión (a_n) de números reales está definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 2015$ y para todo $n \geq 1$, tenemos:

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Calcule el valor de

$$\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \ldots + \frac{a_{2013}}{a_{2014}} - \frac{a_{2014}}{a_{2015}}.$$

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB < CD$, y sea P el punto de intersección de las rectas AD y BC.La circunferencia del triángulo PCD corta a la recta AB en los puntos Q y R. Sean S y T los puntos en los que las tangentes de P a la circunferencia de $ABCD$ tocan dicha circunferencia. Muestra que $PQ = PR$. Muestra que $QRST$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 4. Anselmo y Bonifacio inician un juego en el que sustituyen alternativamente un número escrito en un tablero. En cada turno, un jugador puede sustituir el número escrito por el número de divisores del número escrito o por la diferencia entre el número escrito y el número de divisores que tiene. Anselmo es el primer jugador en jugar, y el que sea el primero en escribir el número 0 es el ganador. Dado que el número inicial es 1036, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y describe dicha estrategia. Nota: Por ejemplo, el número de divisores de 14 es 4, ya que sus divisores son 1, 2, 7 y 14.

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $AC = 2AB$. Sea D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo CAB con BC. Sea F el punto de intersección de la recta paralela a AB que pasa por C con la recta perpendicular a AD que pasa por A. Demostrar que FD pasa por el punto medio de AC.

Problema 6. 39 estudiantes participaron en un concurso de matemáticas. El examen constaba de 6 problemas y cada problema valía 1 punto por una solución correcta y 0 puntos por una solución incorrecta. Para 3 estudiantes cualesquiera, hay a lo más 1 problema que no fue resuelto por ninguno de los tres. Sea B la suma de todas las puntuaciones de los 39 estudiantes. Hallar el menor valor posible de B.

OMCC 2014

Problema 1. Un número entero positivo se llama "tico"si es el producto de tres números primos diferentes que suman 74. Comprueba que 2014 es tico. ¿Qué año será el próximo año tico? ¿Cuál será el último año tico de la historia?

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio con bases AB y CD, inscrito en una circunferencia de centro O. Sea P la intersección de las rectas BC y AD. Una circunferencia que pasa por O y P interseca los segmentos BC y AD en los puntos interiores F y G, respectivamente. Demostrar que $BF = DG$.

Problema 3. Sean a, b, c y d números reales tales que no hay dos iguales,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$$

y $ac = bd$. Hallar el máximo valor posible de

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}.$$

Problema 4. Utilizando cuadrados de lado 1, se forma una figura en forma de escalera por etapas siguiendo el patrón del dibujo. Por ejemplo, la primera etapa utiliza 1 cuadrado, la segunda utiliza 5, etc. Determina la última etapa para la que la figura correspondiente utiliza menos de 2014 cuadrados.

Problema 5. Se eligen los puntos A, B, C y D sobre una recta en ese orden, con AB y CD mayores que BC. Se construyen los triángulos equiláteros APB, BCQ y CDR de forma que P, Q y R estén en el mismo lado respecto a AD. Si $\angle PQR = 120°$, demuestre que

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}.$$

Problema 6. Un entero positivo n es "divertido"si para todos los divisores positivos d de n, $d + 2$ es un número primo. Encuentra todos los números divertidos con el mayor número posible de divisores.

OMCC 2013

Problema 1. Juan escribe la lista de parejas $(n, 3^n)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ en un pizarrón. A medida que va escribiendo la lista, subraya las parejas $(n, 3^n)$ cuando n y 3^n tienen la misma cifra de las unidades. De las parejas subrayadas, cuál ocupa la posición 2013?

Problema 2. Alrededor de una mesa redonda están sentadas en sentido horario las personas $P_1, P_2, \ldots, P_{2013}$. Cada una tiene cierta cantidad de monedas (posiblemente ninguna); entre todas tienen 10000 monedas. Comenzando por P_1 y prosiguiendo en sentido horario, cada persona en su turno hace lo siguiente: Si tiene un número par de monedas, se las entrega todas a su vecino de la izquierda. Si en cambio tiene un número impar de monedas, le entrega a su vecino de la izquierda un número impar de monedas (al menos una y como máximo todas las que tiene), y conserva el resto. Pruebe que, repitiendo este procedimiento, necesariamente llegará un momento en que todas las monedas estén en poder de una misma persona.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadirlátero convexo y M el punto medio del lado AB. La circunferencia que pasa por D y es tangente a AB en A corta al segmento DM en E. La circunferencia que pasa por C y es tangente a AB en B corta al segmento CM en F. Suponga que las rectas AF y BE se cortan en un punto que pertenece a la mediatriz del lado AB. Demuestre que A, E y C son colineales si y solo si B, F y D son colineales.

Problema 4. Ana y Beatriz alternan turnos en un juego que se inicia con un cuadrado de lado 1 dibujado en un tablero infinito. Cada jugada consiste en dibujar un cuadrado que no se superponga con la figura ya dibujada, de manera que uno de sus lados sea un lado (completo) del rectángulo que está dibujado. Gana el juego aquella persona que logre completar una figura cuya área sea múltiplo de 5. Si Ana realiza la primera jugada, ¿existe estrategia ganadora para alguna jugadora?

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea Γ su circuncírculo. La bisectriz del ángulo A interseca a BC en D, a Γ en K (distinto de A), y a la tangente a Γ por B en X. Demuestre que K es el punto medio de AX si y solo si $\frac{AD}{DC} = \sqrt{2}$.

Problema 6. Determine todas las parejas de polinomios no constantes $p(x)$ y $q(x)$, cada uno con coeficiente principal 1, grado n y n raíces enteras no negativas, tales que $p(x) - q(x) = 1$.

OMCC 2012

Problema 1. Encuentra todos los números enteros positivos que son iguales a 700 veces la suma de sus dígitos.

Problema 2. Sea γ la circunferencia del triángulo agudo ABC. Sea P el punto medio del arco menor BC. La paralela a AB que pasa por P corta a BC, AC y γ en los puntos R, S y T, respectivamente. Sean $K \equiv AP \cap BT$ y $L \equiv BS \cap AR$. Demostrar que KL pasa por el punto medio de AB si y sólo si $CS = PR$.

Problema 3. Sean a, b, c números reales que satisfacen $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 1$ y $ab + bc + ac > 0$.

Demuestre que

$$a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ac} \geq 4.$$

Problema 4. Trilandia es una ciudad muy singular. La ciudad tiene la forma de un triángulo equilátero de lado 2012. Las calles dividen la ciudad en varias manzanas con forma de triángulo equilátero de lado 1. También hay calles en la frontera de Trilandia. Hay 6036 calles en total. El alcalde quiere poner puestos de vigilancia en algunas intersecciones de la ciudad para controlar las calles. Un punto de control puede vigilar todas las calles en las que se encuentra. ¿Cuál es el menor número de puntos de control necesarios para vigilar todas las calles de Trilandia?

Problema 5. Alex y luisa son una pareja de ladrones. Todas las mañanas, Luisa roba un tercio del dinero de Alex, pero por la tarde siente remordimientos y le da la mitad de todo el dinero que tiene. Si Luisa no tiene dinero al principio y empieza a robar el primer día, ¿cuál es la menor cantidad entera positiva de dinero que debe tener Alex para que al final del día 2012 ambos tengan una cantidad entera de dinero?

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $AB < BC$, y sean E y F puntos en AC y AB tales que $BF = BC = CE$, ambos en el mismo semiplano que A respecto a BC.

Sea G la intersección de BE y CF. Sea H un punto de la paralela que pasa por G a AC tal que $HG = AF$ (con H y C en semiplanos opuestos respecto a BG). Demostrar que $\angle EHG = \frac{\angle BAC}{2}$.

OMCC 2011

Problema 1. Considere un cubo con una mosca en cada uno de sus vértices. Cuando suena un silbato, cada mosca se desplaza a un vértice de la misma cara que el anterior pero diagonalmente opuesto a él. Después de que suene el silbato, ¿de cuántas maneras pueden cambiar de posición las moscas para que no haya ningún vértice con 2 o más moscas?

Problema 2. En un triángulo escaleno ABC, D es el pie de la altitud que pasa por A, E es la intersección de AC con la bisectriz del $\angle ABC$ y F es un punto de AB. Sea O el circuncentro de ABC y $X = AD \cap BE$, $Y = BE \cap CF$, $Z = CF \cap AD$. Si XYZ es un triángulo equilátero, demostrar que uno de los triángulos OXY, OYZ, OZX debe ser equilátero.

Problema 3. Un "deslizamiento"sobre un entero $n \geq 2$ es una operación que consiste en elegir un divisor primo p de n y sustituir n por $\frac{n+p^2}{p}$. Partiendo de un entero arbitrario $n \geq 5$, aplicamos sucesivamente la operación de deslizamiento sobre él. Demostrar que eventualmente se llega a 5, sin importar los deslizamientos aplicados.

Problema 4. Encontrar todos los enteros positivos p, q, r tales que p y q son números primos y $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(p+1)(q+1)} = \frac{1}{r}$.

Problema 5.

Si x, y, z son números positivos que satisfacen

$$x + \frac{y}{z} = y + \frac{z}{x} = z + \frac{x}{y} = 2.$$

Encuentra todos los valores posibles de $x + y + z$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo agudo y D, E, F los pies de las alturas que pasan por A, B, C respectivamente. Llamemos Y y Z a los pies de las rectas perpendiculares desde B y C a FD y DE, respectivamente. Sea F_1 la reflexión de F respecto a E y E_1 la reflexión de E respecto a F. Si $3EF = FD + DE$, demostrar que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.

OMCC 2010

Problema 1. Denotemos por $S(n)$ la suma de los dígitos del entero positivo n. Encontrar todas las soluciones de la ecuación $n(S(n)-1) = 2010$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo y L, M, N los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. La tangente a la circunferencia de ABC en A interseca a LM y LN en P y Q, respectivamente. Demostrar que CP es paralela a BQ.

Problema 3. Una ficha se coloca en una casilla de un tablero de $m \times n$, y se mueve según las siguientes reglas: En cada turno, la ficha puede moverse a una casilla que comparta un lado con la que está ocupada actualmente. La ficha no puede colocarse en una casilla ya ocupada. Dos movimientos consecutivos no pueden tener la misma dirección.

El juego termina cuando la ficha no puede ser movida. Determine los valores de m y n para los que, colocando la ficha en alguna casilla, todas las casillas del tablero habrán sido ocupadas al final de la partida.

Problema 4. Encuentre todos los números enteros positivos N tales que un tablero de $N \times N$ pueda ser embaldosado usando baldosas de tamaño 5×5 o 1×3.

Nota: Las baldosas deben cubrir completamente el tablero, sin superposiciones.

Problema 5. Si p, q y r son números racionales no nulos tales que $\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{qr^2} + \sqrt[3]{rp^2}$ es un número racional no nulo, demuestre que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

Problema 6. Sean Γ y Γ_1 dos circunferencias internamente tangentes en A, con centros O y O_1 y radios r y r_1, respectivamente ($r > r_1$). B es un punto diametralmente opuesto a A en Γ, y C es un punto en Γ tal que BC es tangente a Γ_1 en P. Sea A' el punto medio de BC. Dado que O_1A' es paralelo a AP, hallar la razón r/r_1.

OMCC 2009

Problema 1. Sea P el producto de todos los dígitos no nulos del entero positivo n. Por ejemplo, $P(4) = 4$, $P(50) = 5$, $P(123) = 6$, $P(2009) = 18$. Encuentra el valor de la suma: $P(1) + P(2) + ... + P(2008) + P(2009)$.

Problema 2. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cruzan en los puntos A y B. Consideremos una circunferencia Γ contenida en Γ_1 y Γ_2, que es tangente a ambas en D y E respectivamente. Sea C uno de los puntos de intersección de la recta AB con Γ, F la intersección de la recta EC con Γ_2 y G la intersección de la recta DC con Γ_1. Sean H e I los puntos de intersección de la recta ED con Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Demostrar que F, G, H e I están en la misma circunferencia.

Problema 3. Hay 2009 casillas numeradas del 1 al 2009, algunas de las cuales contienen piedras. Dos jugadores, A y B, juegan alternativamente, empezando por A. Una jugada consiste en seleccionar una casilla no vacía i, tomar una o varias piedras de esa casilla y colocarlas en la casilla $i + 1$. Si $i = 2009$, las piedras seleccionadas se eliminan. El jugador que elimina la última piedra gana. Si hay 2009 piedras en la caja 2 y las otras están vacías, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora. Si hay exactamente una piedra en cada casilla, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora.

Problema 4. Queremos colocar números naturales alrededor de un círculo de forma que los valores absolutos de las diferencias de cada par de números vecinos son todos diferentes. ¿Es posible colocar los números del 1 al 2009 satisfaciendo esta propiedad? ¿Es posible quitar uno de los números del 1 al 2009 de forma que los restantes números del 2008 puedan colocarse satisfaciendo la propiedad?

Problema 5. Dado un triángulo agudo y escaleno ABC, sea H su ortocentro, O su circuncentro, E y F los pies de las altitudes trazadas desde B y C, respectivamente. La recta AO vuelve a cortar la circunferencia del triángulo en el punto G y los segmentos FE y BC en los puntos X e Y respectivamente. Sea Z el punto de intersección de la recta AH y la recta tangente a la circunferencia en G. Demostrar que HX es paralela a YZ.

Problema 6. Encuentre todos los números primos p y q tales que $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

OMCC 2008

Problema 1. Encontrar el menor número entero positivo N tal que la suma de sus dígitos sea 100 y la suma de los dígitos de $2N$ sea 110.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia centrada en O tal que AC es un diámetro. Se construyen los pararrelogramas $DAOE$ y $BCOF$. Demostrar que si E y F están en la circunferencia entonces $ABCD$ es un rectángulo.

Problema 3. Hay bolsas de 2008 numeradas del 1 al 2008, con ranas de 2008 en cada una de ellas. Dos personas juegan por turnos. Una jugada consiste en seleccionar una bolsa y sacar de ella un número cualquiera de ranas (al menos una), dejando en ella x ranas ($x \geq 0$). Después de cada jugada, de cada bolsa con un número superior al seleccionado y que tenga más de x ranas, se escapan algunas ranas hasta que haya x ranas en la bolsa. Pierde el jugador que saque la última rana de la bolsa número 1. Encuentra y explica una estrategia ganadora.

Problema 4. Cinco chicas tienen una pequeña tienda que abre de lunes a viernes. Como dos personas son siempre suficientes para atenderla, deciden hacer un plan de trabajo para la semana, especificando quién trabajará cada día, y cumpliendo las siguientes condiciones: Cada chica trabajará exactamente dos días a la semana, y las 5 parejas asignadas para la semana deben ser diferentes ¿De cuántas maneras pueden las chicas hacer el plan de trabajo?

Problema 5. Encuentre un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tal que

$$(x+10)P(2x) = (8x-32)P(x+6)$$

para todo real x y $P(1) = 210$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo agudo. Tomemos los puntos P y Q dentro de AB y AC, respectivamente, tales que $BPQC$ es cíclico. La circunferencia de ABQ vuelve a intersecar BC en S y la circunferencia de APC vuelve a intersecar BC en R, PR y QS vuelven a intersecarse en L. Demostrar que la intersección de AL y BC no depende de la selección de P y Q.

OMCC 2007

Problema 1. La Olimpiada Centroamericana es una competición anual. La novena olimpiada se celebra en 2007. Hallar todos los enteros positivos n tales que n divide el número del año en que se celebra la n-ésima Olimpiada.

Problema 2. En un triángulo ABC, la bisectriz del ángulo A y las cevianas BD y CE coinciden en un punto P del interior del triángulo. Demostrar que el cuadrilátero $ADPE$ tiene un círculo interior si y sólo si $AB = AC$.

Problema 3. Sea S un conjunto finito de enteros. Supongamos que para cada dos elementos distintos de S, p y q, existen enteros no necesariamente distintos $a \neq 0$, b, c pertenecientes a S, tales que p y q son las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$. Determinar el número máximo de elementos que puede tener S.

Problema 4. En una isla remota se habla un idioma en el que cada palabra puede escribirse utilizando sólo las letras a, b, c, d, e, f, g. Digamos que dos palabras son "sinónimas"si podemos transformar una en la otra según las siguientes reglas: Cambiar una letra por otras dos de la siguiente manera:

$$a \to bc, b \to cd, c \to de, d \to ef, e \to fg, f \to ga, g \to ab.$$

Si una letra se encuentra entre otras dos letras iguales, éstas se pueden eliminar. Por ejemplo, $dfd \to f$.

Demuestra que todas las palabras de este lenguaje son sinónimas.

Problema 5. Dados dos enteros no negativos $m > n$, digamos que m *termina en* n si podemos obtener n borrando algunos dígitos (de izquierda a derecha) en la representación decimal de m. Por ejemplo, 329 termina en 29, y también en 9.

Determina cuántos números de tres cifras terminan en el producto de sus dígitos.

Problema 6. Consideremos una circunferencia S, y un punto P fuera de ella. Las líneas tangentes desde P se encuentran con S en A y B, respectivamente. Sea M el punto medio de AB. La mediatriz de AM se encuentra con S en un punto C que está dentro del triángulo ABP. AC corta a PM en G, y PM se encuentra con S en un punto D que está fuera del triángulo ABP. Si BD es paralela a AC, demostrar que G es el centroide del triángulo ABP.

OMCC 2006

Problema 1. Para $0 \leq d \leq 9$, definimos los números

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006}$$

Encontrar el último dígito del número

$$S_0 + S_1 + \cdots + S_9.$$

Problema 2. Sean Γ y Γ' dos circunferencias congruentes centradas en O y O', respectivamente, y sea A uno de sus dos puntos de intersección. B es un punto de Γ, C es el segundo punto de intersección de AB y Γ', y D es un punto de Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demostrar que la longitud de CD no depende de la posición de B.

Problema 3. Para todo número natural n definimos

$$f(n) = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Demuestre que para todo número entero $k \geq 1$ la ecuación

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.

Problema 4. El producto de varios enteros positivos distintos es divisible por 2006^2. Determina el valor mínimo que puede tomar la suma de dichos números.

Problema 5. El país *Olimpia* está formado por n islas. La más poblada se llama *Panacenter*, y cada isla tiene un número diferente de habitantes. Queremos construir puentes entre estas islas, con los que podremos viajar en ambas direcciones, bajo las siguientes condiciones: Ningún par de islas está unido por más de un puente. Utilizando los puentes podemos llegar a todas las islas desde el Panacentro. Si queremos viajar desde Panacenter a cada una de las otras islas, de forma que utilicemos cada puente como máximo una vez, el número de habitantes de las islas que visitamos es estrictamente decreciente.

Determina el número de formas en que podemos construir los puentes.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. $I = AC \cap BD$, y E, H, F y G son puntos en AB, BC, CD y DA respectivamente, tales que $EF \cap GH = I$. Si $M = EG \cap AC$, $N = HF \cap AC$, demuestre que

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}.$$

OMCC 2005

Problema 1. Entre los enteros positivos que se pueden expresar como la suma de 2005 enteros consecutivos, ¿cuál ocupa la posición 2005 cuando se ordenan?

Problema 2. Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - c^2 - a^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

Problema 3. Sea ABC un triángulo. Sean P, Q y R los puntos de contacto del incírculo con los lados AB, BC y CA, respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR desde R, P y Q, respectivamente. Muestra que que las rectas AN, BL y CM se encuentran en un punto. Muestra que este punto pertenece a la recta que une el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

Problema 4. Dos jugadores, Rojo y Azul, juegan por turnos en un tablero de 10×10. El azul va primero. En su turno, un jugador elige una fila o columna (no elegida aún por ningún jugador) y colorea todas sus casillas con su propio color. Si alguna de estas casillas ya estaba coloreada, el nuevo color sustituye al anterior.

El juego termina después de 20 turnos, cuando todas las filas y columnas han sido elegidas. El rojo gana si el número de casillas rojas en el tablero supera al menos en 10 el número de casillas azules; en caso contrario, gana el azul.

Determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y describe esta estrategia.

Problema 5. Sea ABC un triángulo, H el ortocentro y M el punto medio de AC. Sea ℓ la paralela que pasa por M a la bisectriz del $\angle AHC$. Demostrar que ℓ divide el triángulo en dos partes de igual perímetro.

Problema 6. Sea n un número entero positivo y p un primo fijo. Tenemos una baraja de n cartas, numeradas con $1,\ 2, \dots,\ n$ y p cajas para poner las cartas en ellas. Determinar todos los posibles enteros n para los que es posible distribuir las cartas en las cajas de forma que la suma de los números de las cartas en cada caja sea la misma.

OMCC 2004

Problema 1. En una pizarra, se escriben los números de 1 a 9. Los jugadores A y B se turnan, y A es el primero. Cada jugador, por turno, elige uno de los números de la pizarra y lo retira, junto con todos los múltiplos (si los hay). El jugador que elimina el último número pierde. Determina si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora.

Problema 2. Definimos la secuencia (a_n) como sigue: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$. Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 inclusive se pueden expresar como $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

Problema 3. ABC es un triángulo, y E y F son puntos de los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Supongamos que M es el punto medio de EF y G es el punto de intersección entre CM y AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

Problema 4. En un tablero de 10×10, la mitad de las casillas son de color blanco y la otra mitad de color negro. Un lado común a dos casillas del tablero es llamado "borde"si las dos casillas tienen colores diferentes. Determina el número mínimo y máximo posible de bordes que puede haber en el tablero.

Problema 5. Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea P el punto sobre AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$. Muestra que $\angle BPC = 90°$. Q es el punto medio de BC y R es el punto de intersección entre la recta AD y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Muestra que los puntos B, P, R y C son concíclicos.

Problema 6. Con perlas de diferentes colores formando collares, se dice que un collar es *primo* si no se puede descomponer en hilos de perlas de la misma longitud, e iguales entre sí. Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de los q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de los q colores posibles.

Nota: dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas y se puede conseguir el mismo color en ambos collares, girando uno de ellos para que coincida con el otro.

OMCC 2003

Problema 1. Dos jugadores A y B se turnan en el siguiente juego: Hay un montón de piedras de 2003. En su primer turno, A elige un divisor de 2003 y retira este número de piedras del montón. A continuación, B elige un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y así sucesivamente. El jugador que tenga que retirar la última piedra pierde. Demuestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describa la estrategia.

Problema 2. S es una circunferencia con AB de diámetro y t es la recta tangente a S en B. Consideremos los dos puntos C y D en t de tal manera que B está entre C y D. Supongamos que E y F son las intersecciones de S con AC y AD y que G y H son las intersecciones de S con CF y DE. Demostrar que $AH = AG$.

Problema 3. Sean a y b enteros positivos con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo hay desigualdad.

Problema 4. S_1 y S_2 son dos circunferencias que se cruzan en dos puntos diferentes P y Q. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas tales que ℓ_1 pasa por el punto P y corta S_1, S_2 en A_1, A_2 respectivamente (ambos distintos de P), y ℓ_2 pasa por el punto Q y corta S_1, S_2 en B_1, B_2 respectivamente (ambos distintos de Q). Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen el mismo perímetro.

Problema 5. Un tablero cuadrado con 8cm lados se divide en 64 casillas con cada lado 1cm. Cada casilla puede estar pintada de blanco o de negro. Halla el número total de formas de colorear el tablero para que cada cuadrado de lado 2cm formado por cuatro casillas con un vértice común contenga dos casillas blancas y dos negras.

Problema 6. Decimos que un número es "tico"si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 2003. Demuestra que existe un número entero positivo N tal que los primeros múltiplos de 2003, $N, 2N, 3N, \ldots 2003N$ son todos ticos. ¿Existe un número entero positivo N tal que todos sus múltiplos son ticos?

OMCC 2002

Problema 1. ¿Para qué números enteros $n \geq 3$ es posible acomodar, en algún orden, los números $1, 2, \cdots, n$ en una forma circular tal que cada número divide la suma de los dos números siguientes, en sentido horario?

Problema 2. Sea ABC un triángulo agudo, y sean D y E los pies de las altitudes trazadas desde los vértices A y B, respectivamente. Demostrar que si,

$$[BDE] \leq [DEA] \leq [EAB] \leq [ABD]$$

entonces, el triángulo es isósceles.

Problema 3. Para cada número entero $a > 1$ se construye una lista infinita de enteros $L(a)$, como sigue: a es el primer número de la lista $L(a)$. Dado un número b en $L(a)$, el siguiente número de la lista es $b+c$, donde c es el mayor entero que divide a b y es menor que b. Encontrar todos los enteros $a > 1$ tales que 2002 está en la lista $L(a)$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo, D el punto medio de BC, E un punto del segmento AC tal que $BE = 2AD$ y F el punto de intersección de AD con BE. Si $\angle DAC = 60°$, hallar la medida del ángulo $\angle FEA$.

Problema 5. Encontrar un conjunto de infinitos enteros positivos S tal que para cada $n \geq 1$ y cualesquiera n elementos distintos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de S, el número $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ no es un cuadrado perfecto.

Problema 6. Una trayectoria desde $(0, 0)$ hasta (n, n) en la red está formada por movimientos unitarios hacia arriba o hacia la derecha. Está equilibrada si la suma de las coordenadas x de sus vértices $2n + 1$ es igual a la suma de sus coordenadas y. Demostrar que un camino equilibrado divide el cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(n, 0)$, (n, n), $(0, n)$ en dos partes con igual área.

OMCC 2001

Problema 1. Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de manera que A y B no están en posiciones consecutivas. A y B juegan en turnos alternos, empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas vecinas, la cual una vez tocada sale del círculo. El ganador es el último que queda en pie. Demuestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, y dé dicha estrategia. Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si es capaz de ganar sin importar lo que haga el adversario.

Problema 2. Sea AB el diámetro de una circunferencia con centro O y radio 1. Sean C y D dos puntos de la circunferencia tales que AC y BD se intersecan en un punto Q situado en el interior de la circunferencia, y $\angle AQB = 2\angle COD$. Sea P un punto que corta las tangentes a la circunferencia que pasan por los puntos C y D. Determinar la longitud del segmento OP.

Problema 3. Encuentra todos los números enteros positivos N tales que sólo dos de los dígitos de N son distintos de 0, uno de ellos es 3, y N es un cuadrado perfecto.

Problema 4. Determinar el menor número entero positivo n tal que existan enteros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, que sean menores o iguales a 15 y que no sean necesariamente distintos, tal que los cuatro últimos dígitos de la suma

$$a_1! + a_2! + \cdots + a_n!$$

es 2001.

Problema 5. Sean a, b y c números reales tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas p_1, p_2 y la ecuación $cx^2+bx+a = 0$ tiene dos soluciones reales distintas q_1, q_2. Sabemos que los números p_1, q_1, p_2, q_2 en ese orden, forman una progresión aritmética. Demostrar que $a + c = 0$.

Problema 6. En la circunferencia de un círculo se marcan 10000 puntos, que se numeran de 1 a 10000 en el sentido de las agujas del reloj. Se dibujan 5000 segmentos de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones: Cada segmento une dos puntos marcados. Cada punto marcado pertenece a uno y sólo un segmento. Cada segmento interseca exactamente uno de los segmentos restantes. A cada segmento se le asigna un número que es el producto del número asignado a cada punto final del segmento.

Sea S la suma de los productos asignados a todos los segmentos. Demostrar que S es múltiplo de 4.

OMCC 2000

Problema 1. Encontrar todos los números naturales de tres dígitos abc $(a \neq 0)$ tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

Problema 2. Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y n con piezas congruentes a las que se muestran a continuación.

Notas: Las piezas no deben superponerse ni dejar huecos. Los cuadritos de las piezas son de lado 1.

Problema 3. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo. Sean P, Q, R, S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE, respectivamente. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo y que su área es igual a $2/9$ el área del cuadrilátero $ABCD$.

Problema 4. En la figura, escribir un entero positivo dentro de cada triangulito, de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos. Dos triangulitos son vecinos si comparten un lado.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo, C_1 y C_2 dos circunferencias que tienen a los lados AB y CA como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado AB en el punto F y C_1 corta al lado CA en el punto E. Además, $\overline{BE}$ corta a C_2 en P y $\overline{CF}$ corta a C_1 en Q. Demostrar que $AP = AQ$.

Problema 6. Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de n. Escriba las 5 representaciones buenas de 10 y determine que enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas.

OMCC 1999

Problema 1. Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A llama a la persona B, A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?

Problema 2. Encontrar un entero positivo n de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número m que es divisor de n.

Problema 3. Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla '+'.

7	8	9	
4	5	6	+
1	2	3	

Dos jugadores A y B juegan de la manera siguiente: A enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla +. Pasa la calculadora a B, que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por A que no sea la misma que la última pulsada por A; a continuación pulsa + y le devuelve la calculadora a A, que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es esta?

Problema 4. En el trapecio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, sea M el punto medio del lado DA. Si $BC = a, MC = b$ y el ángulo MCB mide 150^o, hallar el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b.

Problema 5. Sea a un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demostrar que existen enteros positivos distintos b y c, tales que $a + b, a + c, b + c$ y $a + b + c$ son cuatro cuadrados perfectos.

Problema 6. Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S esté en S. Encuentre el número máximo de elementos de S.