Compilación EGMO

Proyecto MURO

21 de octubre de 2022

Introducción

Somos el proyecto MURO, y nuestro objetivo es conformar un Movimiento Unificador de Recursos Olímpicos.

Esta es una compilación con todos los problemas de la European Girls' Mathematical Olympiad, (en un futuro agregaremos pistas y soluciones). Esperamos la disfrutes! y no dudes en compartirnos cualquier comentario o crítica constructiva.

Nos puedes contactar por aquí: proyectomuro.com.

Índice

I. Problemas

EGMO 2021

Problema 1. El número 2021 es fantabuloso. Si para algún entero positivo m, alguno de los elementos del conjunto $\{m, 2m+1, 3m\}$ es fantabuloso, entonces todos los elementos de dicho conjunto son fantabulosos. ¿Esto implica que el número 2021^{2021} es fantabuloso?

Problema 2. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que la ecuación

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

se cumple para todos los números racionales x y y. Nota: $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de todos los números racionales.

Problema 3. Sea ABC un triángulo con ángulo obtuso en A. Sean E y F las intersecciones de la bisectriz exterior del ángulo $\angle BAC$ con las alturas del triángulo ABC desde B y C, respectivamente. Sean M y N puntos en los segmentos EC y FB, respectivamente, tales que $\angle EMA = \angle BCA$ y $\angle ANF = \angle ABC$. Demuestre que los puntos E, F , M y N están sobre una misma circunferencia.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC. La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en el punto E. La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en el punto F. Demuestre que la reflexión de A sobre la recta EF está en la recta BC.

Problema 5. Un plano tiene un punto especial O llamado origen. Sea P un conjunto de 2021 puntos en el plano que cumple las siguientes dos condiciones: (i) no hay tres puntos de P sobre una misma recta, (ii) no hay dos puntos de P sobre una misma recta que pasa por el origen. Se dice que un triángulo con vértices en P es gordo si O es un punto interior de dicho triángulo. Encuentre la mayor cantidad de triángulos gordos que puede haber.

Problema 6. Determine si existe un entero no negativo a para el cual la ecuación

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

tiene más de un millón de soluciones diferentes (m, n) con m y n enteros positivos. Nota: la expresión $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera (o piso) del número real x. Por ejemplo, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ y $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

EGMO 2020

Problema 1. Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ enteros positivos tales que

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Demuestre que al menos uno de los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ es divisible por 2^{2020}.

Problema 2. Encontrar todas las listas $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ de números reales no negativos tales que se satisfagan las tres condiciones siguientes:
$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$; $x_{2020} \leq x_1 + 1$; Existe una permutación $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ tal que

$$\sum_{I=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3$$

Una permutación de una lista es una lista de la misma longitud, con los mismos elementos pero en un orden cualquiera. Por ejemplo, $(2, 1, 2)$ es una permutación de $(1, 2, 2)$, y ambas son permutaciones de $(2, 2, 1)$. En particular cualquier lista es una permutación de ella misma.

Problema 3. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que $\angle A = \angle C = \angle E$ y $\angle B = \angle D = \angle F$. Además, las bisectrices interiores de los ángulos $\angle A, \angle C$ y $\angle E$ son concurrentes. Demuestre que las bisectrices interiores de los ángulos $\angle B, \angle D$ y $\angle F$ también son concurrentes. La notación $\angle A$ hace referencia al ángulo $\angle FAB$. Lo mismo se aplica a los otros ángulos del hexágono.

Problema 4. Una permutación de los enteros $1, 2, \ldots, m$ se llama fresca si no existe ningún entero positivo $k < m$ tal que los primeros k elementos de la permutación son los números $1, 2, \ldots, k$ en algún orden. Sea f_m el número de permutaciones frescas de los enteros $1, 2, \ldots, m$. Muestra que

$$f_n \geq n \cdot f_{n-1}$$

para todo $n \geq 3$. Por ejemplo, para $m = 4$ la permutación $(3, 1, 4, 2)$ es fresca, mientras que la permutación $(2, 3, 1, 4)$ no lo es.

Problema 5. Considere el triángulo ABC con $\angle BCA > 90°$. Sea R el radio del circuncírculo Γ de ABC. En el segmento AB existe un punto P con $PB = PC$ tal que la longitud de PA es igual a R. La mediatriz de PB corta a Γ en los puntos D y E. Demuestre que P es el incentro del triángulo CDE.

Problema 6. Sea $m > 1$ un entero. Se define una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como $a_1 = a_2 = 1$, $a3 = 4$, y para todo $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Determine todos los enteros m tales que cada término de la sucesión es un cuadrado perfecto.

EGMO 2019

Problema 1. Encuentre todas las ternas (a, b, c) de números reales tales que $ab + bc + ca = 1$ y

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Problema 2. Sea n un entero positivo. En un tablero de $2n \times 2n$ casillas se colocan dominós de manera que cada casilla del tablero sea adyacente a exactamente una casilla cubierta por un dominó. Para cada n, determine la mayor cantidad de dominós que se pueden poner de esa manera. Nota: Un dominó es una ficha de 1×2 o de 2×1 cuadrados unitarios. Los dominós son colocados en el tablero de manera que cada dominó cubre exactamente dos casillas del tablero y los dominós no se superponen (no se traslapan). Decimos que dos casillas son adyacentes si son diferentes y tienen un lado en común.

Problema 3. Sea ABC un triángulo tal que $\angle CAB > \angle ABC$, y sea I su incentro. Sea D el punto en el segmento BC tal que $\angle CAD = \angle ABC$. Sea γ la circunferencia que pasa por I y es tangente a la recta AC en el punto A. Sea X el segundo punto de intersección de γ con la circunferencia circunscrita de ABC. Muestre que las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle CXB$ se intersecan en un punto de la recta BC.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con incentro I. La circunferencia que pasa por B y es tangente a la recta AI en el punto I corta al lado AB por segunda vez en P. La circunferencia que pasa por C y es tangente a la recta AI en el punto I corta al lado AC por segunda vez en Q. Muestre que PQ es tangente a la circunferencia inscrita del triángulo ABC.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un número entero, y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos. Muestre que existen enteros positivos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que cumplen las siguientes tres condiciones: $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$; los residuos de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ al dividirlos entre n son todos diferentes; y

$$b_1 + b_2 + \cdots b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \right\rfloor\right)$$

Nota: Denotamos por $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera del número real x, es decir, al mayor entero que es menor o igual a x.

Problema 6. Alina traza 2019 cuerdas en una circunferencia. Los puntos extremos de éstas son todos diferentes. Un punto se considera marcado si es de uno de los siguientes tipos: (i) uno de los 4038 puntos extremos de las cuerdas; o (ii) un punto de intersección de al menos dos de las cuerdas. Alina etiqueta con un número cada punto marcado. De los 4038 puntos del tipo (i), 2019 son etiquetados con un 0 y los otros 2019 puntos con un 1. Ella etiqueta cada punto del tipo (ii) con un entero arbitrario, no necesariamente positivo. En cada cuerda, Alina considera todos los segmentos entre puntos marcados consecutivos (si una cuerda tiene k puntos marcados, entonces tiene $k - 1$ de estos segmentos). Sobre cada uno de estos segmentos, Alina escribe dos números: en amarillo escribe la suma de las etiquetas de los puntos extremos del segmento, mientras que en azul escribe el valor absoluto de su diferencia. Alina se da cuenta que los $N + 1$ números amarillos son exactamente los números $0, 1, \ldots, N$. Muestre que al menos uno de los números azules es múltiplo de tres. Nota: Una cuerda es el segmento de recta que une dos puntos distintos en una circunferencia.

EGMO 2018

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $CA = CB$ y $\angle ACB = 120°$, y sea M el punto medio de AB. Sea P un punto variable de la circunferencia que pasa por A, B y C. Sea Q el punto en el segmento CP tal que $QP = 2QC$. Se sabe que la recta que pasa por P y que es perpendicular a la recta AB interseca a la recta MQ en un único punto N. Muestra que existe una circunferencia fija tal que N se encuentra en dicha circunferencia para todas las posibles posiciones de P.

Problema 2. Considere el conjunto

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, 4, \cdots\right\}.$$

(a) Muestra que todo entero $x \geq 2$ puede ser escrito como el producto de uno o más elementos de A, no necesariamente distintos. (b) Para todo entero $x \geq 2$, sea $f(x)$ el menor entero tal que x puede ser escrito como el producto de $f(x)$ elementos de A, no necesariamente distintos. Demuestre que existen infinitos pares (x, y) de enteros con $x \geq 2$, $y \geq 2$, tales que

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

Nota: Los pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son diferentes si $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$.

Problema 3. Las n concursantes de cierta EGMO se llaman $C_1, \ldots, C_n$. Después de la competencia, se ponen en fila fuera del restaurante de acuerdo a las siguientes reglas: El Jurado escoge el orden inicial de las concursantes en la fila. Cada minuto, el Jurado escoge un entero i con $1 \leq i \leq n$. – Si la concursante C_i tiene al menos otras i concursantes delante de ella, le paga una moneda al Jurado y se mueve exactamente i posiciones adelante en la fila. – Si la concursante C_i tiene menos de i concursantes delante de ella, el restaurante se abre y el proceso termina.

(a) Muestra que el proceso no puede continuar indefinidamente, sin importar las elecciones del Jurado. (b) Determine para cada n el máximo número de monedas que el Jurado puede recolectar escogiendo el orden inicial y la secuencia de movimientos astutamente.

Problema 4. Un dominó es una ficha de 1×2 o de 2×1 cuadrados unitarios. Sea $n \geq 3$ un entero. Se ponen dominós en un tablero de $n \times n$ casillas de tal manera que cada dominó cubre exactamente dos casillas del tablero sin superponerse (en otras palabras, sin traslaparse). El valor de una fila o columna es el número de dominós que cubren al menos una casilla de esta fila o columna. Una configuración de dominós se llama balanceada si existe algún entero $k \geq 1$ tal que cada fila y cada columna tiene valor k. Demuestre que existe una configuración balanceada para cada $n \geq 3$, y encuentre el mínimo número de dominós necesarios para una tal configuración.

Problema 5. Sea Γ la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo ABC. Una circunferencia Ω es tangente al segmento AB y tangente a Γ en un punto situado al mismo lado de la recta AB que C. La bisectriz del ángulo $\angle BCA$ interseca a Ω en dos puntos distintos P y Q. Demuestre que $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6. (a) Demuestre que para todo número real t tal que $0 < t < \frac{1}{2}$ existe un entero positivo n con la siguiente propiedad: para todo conjunto S de n enteros positivos existen dos elementos distintos x e y de S, y un entero no negativo m tal que $|x - my| \leq ty$.
(b) Determine si para todo número real t con $0 < t < \frac{1}{2}$ existe un conjunto infinito S de enteros positivos tal que $|x - my| > ty$ para todo par de elementos distintos x e y de S y para todo entero positivo m.

EGMO 2017

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que cumple que $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ y $\angle ABC > \angle CDA$. Sean Q y R puntos en los segmentos BC y CD, respectivamente, tales que la recta QR interseca las rectas AB y AD en los puntos P y S, respectivamente. Se sabe que $PQ = RS$. Sea M el punto medio de BD y sea N el punto medio de QR. Demuestra que los puntos M, N, A y C están en una misma circunferencia.

Problema 2. Encuentra el menor número entero positivo k para el que existe una coloración de los enteros positivos $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colores y una función $f : \mathbb{Z}_{>0}$ a $\mathbb{Z}_{>0}$ con las dos propiedades siguientes:

(i) Para todos los enteros positivos m, n del mismo color, $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Hay enteros positivos m, n tales que $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

En una coloración de $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colores, cada entero está coloreado exactamente en uno de los k colores. Tanto en (i) como en (ii) los enteros positivos m, n no son necesariamente distintos.

Problema 3. Se consideran 2017 rectas en el plano tales que no hay tres de ellas que pasen por el mismo punto. La hormiga Turbo se coloca en un punto de una recta (distinto de los puntos de intersección) y empieza a moverse sobre las rectas de la siguiente manera: se mueve en la recta en la que está hasta que llega al primer punto de intersección, ahí cambia de recta torciendo a la izquierda o a la derecha, alternando su elección en cada intersección a la que llega. Turbo solo puede cambiar de dirección en los puntos de intersección. ¿Puede existir un segmento de recta por el cual la hormiga viaje en ambos sentidos?

Problema 4. Sea $n \geq 1$ un entero y sean $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ enteros positivos. En un grupo de $t_n + 1$ personas, se juegan algunas partidas de ajedrez. Dos personas pueden jugar entre sí a lo más una vez. Demuestra que es posible que las siguientes dos condiciones se den al mismo tiempo: (i) El número de partidas jugadas por cada persona es uno de los números $t_1, t_2, ..., t_n$. (ii) Para cada i con $1 \leq ilen$, hay al menos una persona que juega exactamente t_i partidas de ajedrez.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un entero. Una n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de enteros positivos no necesariamente distintos es costosa si existe un entero positivo k tal que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existe una n-tupla costosa. b) Demuestra que para todo entero positivo impar m existe un entero $n \geq 2$ tal que m pertenece a una n-tupla costosa.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo que no tiene dos lados con la misma longitud. Las reflexiones del gravicentro G y el circuncentro O de ABC con respecto a los lados BC, CA, AB se denotan como G_1, G_2, G_3, y O_1, O_2, O_3, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos $G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A$ y ABC tienen un punto en común.

EGMO 2016

Problema 1. Sean n un entero positivo impar, y $x_1, \dots, x_n$ números reales no negativos. Muestra que

$$\min_{i=1,\dots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\dots,n}(2x_j x_{j+1})$$

donde $x_{n+1} = x_1$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y X la intersección de las diagonales AC y BD. Sean C_1, D_1 y M los puntos medios de los segmentos CX, DX y CD, respectivamente. Las rectas AD_1 y BC_1 se intersecan en Y , la recta MY interseca a las diagonales AC y BD en dos puntos distintos, que llamamos respectivamente E y F . Demostrar que la recta XY es tangente a la circunferencia que pasa por E, F y X.

Problema 3. Sea m un entero positivo. Se considera un tablero de $4m \times 4m$ casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están relacionadas si pertenecen ya sea a la misma fila o a la misma columna. Ninguna casilla está relacionada con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul de tal manera que cada casilla está relacionada con al menos dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

Problema 4. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se intersecan en un punto que pertenece a ω.

Problema 5. Sean k y n enteros tales que $k \geq 2$ y $k \leq n \leq 2k-1$. Se ponen piezas rectangulares, cada una de tamaño $1 \times k$ ó $k \times 1$, en un tablero de $n \times n$ casillas cuadradas, de forma que cada pieza cubra exactamente k casillas del tablero y que no haya dos piezas superpuestas. Se hace esto hasta que no se puedan colocar más piezas. Para cada n y k que cumplen las condiciones anteriores, determinar el mínimo número de piezas que puede contener dicho tablero.

Problema 6. Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que n^4 tiene un divisor en el conjunto $\{n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+2n\}$. Demostrar que hay infinitos elementos en S de cada una de las formas $7m, 7m+1, 7m+2, 7m+5$ y $7m+6$, pero S no contiene elementos de la forma $7m+3$ y $7m+4$, para m entero.

EGMO 2015

Problema 1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo, y sea D el pie de la altura trazada desde C. La bisectriz de $\angle ABC$ intersecta a CD en E y vuelve a intersectar al circuncírculo ω de $\triangle ADE$ en F. Si $\angle ADF = 45^\circ$, muestra que CF es tangente a ω.

Problema 2. Una ficha de dominó es de 2×1 o de 1×2 cuadrados unitarios. Determina de cuántas maneras distintas se pueden acomodar exactamente n^2 fichas de dominó en un tablero de ajedrez de tamaño $2n \times 2n$ de forma que cualquier cuadrado de 2×2 contiene al menos dos cuadrados unitarios sin cubrir que están en la misma fila o en la misma columna.

Problema 3. Sean n y m enteros mayores a 1, y sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enteros positivos menores o iguales a n^m. Demuestra que existen enteros positivos $b_1, b_2, \ldots, b_m$ menores o iguales a n, tales que

$$mcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

donde $mcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ denota el máximo común divisor de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Problema 4. Determina si existe una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de enteros positivos que satisface la igualdad

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

para todo entero positivo n.

Problema 5. Sean m y n enteros positivos con $m > 1$. Anastasia particiona el conjunto de enteros $1, 2, \ldots, 2m$ en m parejas. Luego Boris escoge un entero de cada pareja y suma los enteros escogidos. Demuestra que Anastasia puede elegir las parejas de manera que Boris no pueda hacer que su suma sea igual a n.

Problema 6. Sea H el ortocentro y G el gravicentro del triángulo acutángulo $\triangle ABC$, con $AB \neq AC$. La línea AG intersecta al circuncírculo de $\triangle ABC$ en A y en P. Sea P' la reflexión de P sobre la línea BC. Demuestra que $\angle CAB = 60^\circ$ si y solo si $HG = GP'$.

EGMO 2014

Problema 1. Determina todos los números reales t tales que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado, entonces $a^2 + bct, b^2 + cat, c^2 + abt$ son también las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado.

Problema 2. Sean D y E puntos en los lados AB y AC de un triángulo ABC, respectivamente, y tales que $DB = BC = CE$. Sean F el punto de intersección de las rectas CD y BE, I el incentro del triángulo ABC, H el ortocentro del triángulo DEF y M el punto medio del arco BAC del circuncírculo del triángulo ABC. Demuestra que I, H y M son colineales.

Problema 3. Denotamos por $d(m)$ el número de divisores positivos de un entero positivo m, y por $\omega(m)$ el número de primos distintos que dividen a m. Sea k un entero positivo. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $\omega(n) = k$ y $d(n)$ no divide a $d(a^2 + b^2)$ para todos los enteros positivos a y b tales que $a + b = n$.

Problema 4. Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existen enteros $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ que satisfacen la siguiente condición: si $0 < i < n$, $0 < j < n$ con $i \neq j$ y $2i + j$ divisible entre n, entonces $x_i < x_j$.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Se tienen n cajas y cada caja contiene un número no negativo de f5chas. Un movimiento consiste en tomar dos f5chas de una de las cajas, dejar una fuera de las cajas y poner la otra en otra caja. Decimos que una configuración de f5chas es resoluble si es posible aplicar un número finito de movimientos (que puede ser igual a cero) para obtener una configuración en la que no haya cajas vacías. Determinar todas las configuraciones iniciales de f5chas que no son resolubles y se vuelven resolubles al agregar una f5cha en cualquiera de las cajas (sin importar en cual caja se pone la f5cha).

Problema 6. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

para todos números reales x y y.

EGMO 2013

Problema 1. El lado BC del triángulo ABC se prolonga más allá de C hasta D de modo que $CD = BC$. El lado CA se prolonga más allá de A hasta E de modo que $AE = 2CA$. Demostrar que, si $AD = BE$, el triángulo ABC es rectángulo.

Problema 2. Determine todos los enteros m para los que el cuadrado $m \times m$ se puede diseccionar en cinco rectángulos, cuyas longitudes de los lados son los enteros $1, 2, 3, \ldots, 10$ en algún orden.

Problema 3. Sea n un entero positivo.

(a) Demostrar que existe un conjunto S de $6n$ enteros positivos diferentes entre sí, tal que el mínimo común múltiplo de dos elementos cualesquiera de S no es mayor que $32n^2$.

(b) Demostrar que todo conjunto T de $6n$ enteros positivos distintos por pares contiene dos elementos cuyo mínimo común múltiplo es mayor que $9n^2$.

Problema 4. Encontrar todos los enteros positivos a y b para los que hay tres enteros consecutivos en los que el polinomio

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

toma valores enteros.

Problema 5. Sea Ω el circuncírculo del triángulo ABC. La circunferencia ω es tangente a los lados AC y BC, y es internamente tangente a la circunferencia Ω en el punto P. Una recta paralela a AB que corta el interior del triángulo ABC es tangente a ω en Q.

Demostrar que $\angle ACP = \angle QCB$.

Problema 6. Blancanieves y los siete enanos viven en su casa del bosque. En cada uno de 16 días consecutivos, algunos de los enanos trabajaron en la mina de diamantes mientras los restantes recogían bayas en el bosque. Ningún enano realizó ambos tipos de trabajo el mismo día. En dos días diferentes (no necesariamente consecutivos), al menos tres enanos realizaron cada uno ambos tipos de trabajo. Además, el primer día, los siete enanos trabajaron en la mina de diamantes. Demuestra que, en uno de estos 16 días, los siete enanos estuvieron recogiendo bayas.

EGMO 2012

Problema 1. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Los puntos D, E, F se encuentran en los interiores de los lados BC, CA, AB respectivamente, de forma que DE es perpendicular a CO y DF es perpendicular a BO. (Por interior entendemos, por ejemplo, que el punto D se encuentra en la recta BC y D está entre B y C en dicha recta). Sea K el circuncentro del triángulo AFE. Demostrar que las rectas DK y BC son perpendiculares.

Problema 2. Sea n un entero positivo. Encontrar el mayor entero posible m, en términos de n, con la siguiente propiedad: una cuadrícula con m filas y n columnas puede llenarse con números reales de tal manera que para dos filas diferentes $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ y $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ se cumple que $\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, ..., |a_n - b_n|) = 1$.

Problema 3. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Un conjunto A de enteros se denomina de "suma completa"si $A \subseteq A + A$, es decir, cada elemento $a \in A$ es la suma de algún par de elementos $b, c \in A$ (no necesariamente diferentes). Se dice que un conjunto A de enteros es "libre de suma cero"si 0 es el único entero que no puede expresarse como la suma de los elementos de un subconjunto finito no vacío de A. ¿Existe un conjunto de suma completa libre de suma cero?

Problema 5. Los números p y q son primos y satisfacen

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

para algún entero positivo n. Encontrar todos los valores posibles de $q - p$.

Problema 6. Hay infinitas personas registradas en la red social Mugbook. Algunas parejas de usuarios (diferentes) están registradas como amigos, pero cada persona sólo tiene un número finito de amigos. Cada usuario tiene al menos un amigo. (La amistad es mutua; es decir, si A es amigo de B, entonces B es amigo de A). Cada persona debe designar a uno de sus amigos como su mejor amigo. Si A designa a B como su mejor amigo, entonces (por desgracia) no se deduce que B designe necesariamente a A como su mejor amigo. A alguien designado como mejor amigo se le llama mejor amigo 1. En términos más generales, si $n > 1$ es un número entero positivo, entonces un usuario es un n-mejor amigo siempre que haya sido designado como mejor amigo de alguien que sea un $(n-1)$-mejor amigo. Alguien que es un k-mejor amigo para cada entero positivo k se llama popular. (a) Demuestre que toda persona popular es el mejor amigo de una persona popular. (b) Demuestre que si la gente puede tener infinitos amigos, entonces es posible que una persona popular no sea el mejor amigo de una persona popular.

Problema 7. Sea ABC un triángulo acutángulo con circunferencia Γ y ortocentro H. Sea K un punto de Γ en el otro lado de BC desde A. Sea L la reflexión de K en la recta AB, y sea M la reflexión de K en la recta BC. Sea E el segundo punto de intersección de Γ con la circunferencia del triángulo BLM. Demostrar que las rectas KH, EM y BC son concurrentes.

Problema 8. Una palabra es una secuencia finita de letras de algún alfabeto. Una palabra es repetitiva si es una concatenación de al menos dos subpalabras idénticas (por ejemplo, *ababab* y *abcabc* son repetitivas, pero *ababa* y *aabb* no lo son). Demostrar que si una palabra tiene la propiedad de que el intercambio de dos letras adyacentes cualquiera hace que la palabra sea repetitiva, entonces todas sus letras son idénticas.