Compilación de concursos

Proyecto MURO

2022

Índice

I. Problemas OMM

Problemas Resueltos

OMM	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2021						
2020						
2019						
2018						
2017						
2016						
2015						
2014						
2013						
2012						
2011						
2010						
2009						
2008						
2007						
2006						
2005						
2004						
2003						
2002						
2001						
2000						
1999						
1998						
1997						
1996						
1995						
1994						
1993						
1992						
1991						
1990						
1989						
1988						
1987						

OMM 2021

Problema 1. Los números reales positivos a_1, a_2, a_3 son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, y análogamente, b_1, b_2, b_3 son números reales positivos distintos y términos consecutivos de una progresión aritmética. ¿Es posible utilizar tres segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3 como bases, y otros tres segmentos de longitudes b_1, b_2, b_3 como alturas, para construir tres rectángulos de igual área?

Problema 2. Sea ABC un triángulo tal que $\angle ACB > 90°$ y sea D el punto de la recta BC tal que AD es perpendicular a BC. Considera Γ la circunferencia de diámetro BC. Una recta que pasa por D es tangente a la circunferencia Γ en P, corta al lado AC en M (quedando M entre A y C) y corta al lado AB en N. Demuestra que M es punto medio de DP si y solo si N es punto medio de AB.

Problema 3. Sean $m, n \geq 2$ dos enteros. En una cuadrícula de $m \times n$, una hormiga empieza en el cuadrito inferior izquierdo y quiere caminar al camino superior derecho. Cada paso que da la hormiga debe ser a un cuadrito adyacente, y de acuerdo a las siguientes posibilidades: $\uparrow$, $\rightarrow$ y $\nearrow$. Sin embargo, un malvado mago ha dejado caer lava desde arriba de la cuadrícula y ha destruido algunos cuadritos, de forma tal que:

- Si un cuadrito está destruido, entonces todos los cuadritos superiores a él también también están destruidos.
- El número de cuadritos destruidos es mayor o igual a 0.
- Quedan suficientes cuadritos sin destruir para que la hormiga pueda llegar a la meta.

Sea P el número de caminos de longitud par que puede seguir la hormiga. Sea I el número de caminos de longitud impar que puede seguir la hormiga. Encuentra todos los posibles valores de $P - I$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo escálelo con $\angle BAC = 60°$ y ortocentro H. Sean ω_b la circunferencia que pasa por H y es tangente a AB en B, y ω_c la circunferencia que pasa por H y es tangente a AC en C. Prueba que ω_b y ω_c solamente tienen a H como punto común. Prueba que la recta que pasa por H y el circuncentro O del triángulo ABC es una tangente común a ω_b y ω_c.

Problema 5. Para cada entero $n < 0$ con expansión decimal $\overline{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k}$, definimos a $s(n)$ como sigue:

Si n es par, $s(n) = \overline{a_1 a_2} + \overline{a_3 a_4} \cdots + \overline{a_{k-1} a_k}$. Si n es impar, $s(n) = a_1 + \overline{a_2 a_3} \cdots + \overline{a_{k-1} a_k}$. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces $s(n) = 1 + 23 = 24$ y si $n = 2021$ entonces $s(n) = 20 + 21 = 41$.

Decimos que n es "digital"si n es múltiplo de $s(n)$. Muestra que entre cualesquiera 198 enteros positivos consecutivos, todos ellos menoress a 2000021, hay uno de ellos que es digital.

Problema 6. Determina todos los conjuntos no vacíos $C_1, C_2, C_3, \cdots$ tales que cada uno de ellos tiene un número finito de elementos, y todos sus elementos son enteros positivos, con la siguiente propiedad: Para cualesquiera enteros positivos n y m, el número de elementos del conjunto C_n más el número de elementos del conjunto C_m es igual a la suma de los elementos del conjunto C_{m+n}.

OMM 2020

Problema 1. Un conjunto de cinco enteros positivos distintos se llama "virtual"si el máximo común divisor de cualesquiera tres de sus elementos es mayor que 1, pero el máximo común divisor de cuatro de ellos es igual a 1. Demostrar que, en cualquier conjunto virtual, el producto de sus elementos tiene al menos 2020 divisores positivos distintos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta BI se encuentra con AC en D. Sea P un punto en CI tal que $DI = DP$, $(P \neq I)$, E el segundo punto de intersección del segmento BC con el circuncírculo de ABD y Q el segundo punto de intersección de la recta EP con el circuncírculo de AEC. Demuestra que $\angle PDQ = 90°$.

Problema 3. Sea $n \geq 3$ un número entero. Dos jugadores, Ana y Beto, juegan al siguiente juego. Ana etiqueta los vértices de un n-ágono regular con los números del 1 al n, en el orden que quiera. Cada vértice debe ser etiquetado con un número diferente. A continuación, colocamos un guajolote en cada uno de los n vértices.
Estos guajolotes se entrenan para lo siguiente. Si Beto silba, cada guajolote se mueve al vértice adyacente con mayor etiqueta. Si Beto aplaude, cada guajolote se mueve al vértice adyacente con la etiqueta menor.
Beto gana si, tras un cierto número de silbidos y palmadas, consigue mover todos los guajolotes al mismo vértice. Ana gana si consigue etiquetar los vértices para que Beto no pueda hacerlo. Para cada $n \geq 3$, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora.

Problema 4. Sea $n \geq 3$ un número entero. En un juego hay n cajas en un círculo. Al principio, cada caja contiene un objeto que puede ser piedra, papel o tijeras, de forma que no hay dos cajas adyacentes con el mismo objeto, y cada objeto aparece en al menos una caja.

Al igual que en el juego, piedra gana a tijera, tijera gana a papel y papel gana a piedra.

El juego consiste en mover objetos de una caja a otra según la siguiente regla:

Se eligen dos cajas adyacentes y un objeto de cada una de ellas de forma que sean diferentes, y movemos el objeto perdedor a la caja que contiene el objeto ganador. Por ejemplo, si elegimos una piedra de la caja A y unas tijeras de la caja B, movemos las tijeras a la caja A.

Demuestra que, aplicando la regla suficientes veces, es posible mover todos los objetos a la misma caja.

Problema 5. Un conjunto $\{a, b, c, d\}$ de cuatro enteros positivos se llama "bueno"si hay dos de ellos tales que su producto es múltiplo del mayor común divisor de los dos restantes. Por ejemplo, el conjunto $\{2, 4, 6, 8\}$ es bueno ya que el máximo común divisor de 2 y 6 es 2, y divide a $4 \times 8 = 32$.

Encuentra el mayor valor posible de n, tal que cualquier conjunto de cuatro elementos con elementos menores o iguales a n sea bueno.

Problema 6. Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales no nulos que satisfacen la ecuación

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\ldots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

Encuentra todos los valores posibles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

OMM 2019

Problema 1. Un número entero $m \geq 1$ es mexica si es de la forma $n^{d(n)}$, donde n es un entero positivo y $d(n)$ es el número de enteros positivos que dividen a n. Encuentra todos los números de mexica menores que 2019.

Problema 2. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio de AH. La recta BH corta a AC en D. Se considera un punto E tal que BC es la mediatriz de DE. Los segmentos CM y AE se cruzan en F. Muestra que BF es perpendicular a CM.

Problema 3. Sea $n \geq 2$ un número entero. Considera $2n$ puntos alrededor de un círculo. Cada vértice se ha marcado con un número entero desde 1 hasta n, inclusive, y cada uno de estos enteros se ha utilizado exactamente dos veces. Isabel divide los puntos en n pares, y dibuja los segmentos que los unen, con la condición de que estos segmentos no se crucen. A continuación, asigna a cada segmento el mayor número entero entre sus puntos extremos. Muestra que, independientemente de cómo se hayan marcado los puntos, Isabel siempre puede elegir los pares de forma que utilice exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para marcar los segmentos. ¿Se pueden etiquetar los puntos de tal manera que, independientemente de cómo Isabel divida los puntos en pares, siempre utilice exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

Nota: Para cada número real x, $\lceil x \rceil$ denota el menor número entero mayor o igual que x. Por ejemplo, $\lceil 3,6 \rceil = 4$ y $\lceil 2 \rceil = 2$.

Problema 4. Una lista de enteros positivos se llama buena si el elemento máximo de la lista aparece exactamente una vez. Una sublista es una lista formada por uno o más elementos consecutivos de una lista. Por ejemplo, la lista $10, 34, 34, 22, 30, 22$ la sublista $22, 30, 22$ es buena y $10, 34, 34, 22$ no lo es. Una lista es muy buena si todas sus sublistas son buenas. Encontrar el valor mínimo de k tal que exista una lista muy buena de longitud 2019 con k valores diferentes en ella.

Problema 5. Sean $a > b$ enteros positivos relativamente primos. Un saltamontes se sitúa en el punto 0 de una recta numérica. Cada minuto, el saltamontes salta de acuerdo con las siguientes reglas:

Si el minuto actual es un múltiplo de a y no un múltiplo de b, salta a unidades hacia adelante. Si el minuto actual es un múltiplo de b y no un múltiplo de a, salta b unidades hacia atrás. Si el minuto actual es tanto un múltiplo de b como un múltiplo de a, salta $a - b$ unidades hacia adelante. Si el minuto actual no es ni un múltiplo de a ni un múltiplo de b, no se mueve.

Encuentra todas las posiciones de la recta numérica que el saltamontes acabará alcanzando.

Problema 6. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 45°$. Sean H, O el ortocentro y el circuncentro de ABC, respectivamente. Sea ω la circunferencia de ABC y P el punto sobre ω tal que la circunferencia de PBH es tangente a BC. Sean X y Y los circuncentros de PHB y PHC respectivamente. Sean O_1, O_2 los circuncentros de PXO y PYO respectivamente. Muestra que O_1 y O_2 están en AB y AC, respectivamente.

OMM 2018

Problema 1. Sean A y B dos puntos de una recta ℓ, M el punto medio de AB, y X un punto del segmento AB distinto de M. Sea Ω una semicircunferencia de diámetro AB. Consideremos un punto P sobre Ω y sea Γ la circunferencia que pasa por P y X que es tangente a AB. Sea Q el segundo punto de intersección de Ω y Γ. La bisectriz del ángulo interno del $\angle PXQ$ interseca a Γ en un punto R. Sea Y un punto de ℓ tal que RY es perpendicular a ℓ. Muestra que $MX > XY$.

Problema 2. Para cada número entero positivo m, definimos L_m como la figura que se obtiene al superponer dos rectángulos de 1×1 y $m \times 1$ de manera que coincidan en el cuadrado de 1×1 en sus extremos, como se muestra en la figura.

Utilizando unas figuras $L_{m_1}, L_{m_2}, \ldots, L_{m_k}$, cubrimos completamente un tablero $n \times n$, de forma que las aristas de la figura coincidan con líneas del tablero. Entre todas las coberturas posibles del tablero, encontrar el mínimo valor posible de $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.

Nota: Al cubrir el tablero, las figuras pueden estar giradas o reflejadas, y pueden solaparse o no estar completamente contenidas en el tablero.

Problema 3. Una secuencia $a_2, a_3, \ldots, a_n$ de enteros positivos se dice que es campechana, si para cada i tal que $2 \leq i \leq n$ se cumple que exactamente a_i términos de la secuencia son relativamente primos de i. Decimos que el tamaño de dicha sucesión es $n-1$. Sea $m = p_1 p_2 \ldots p_k$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son primos distintos por parejas y $k \geq 2$. Muestra que existen al menos dos secuencias campechanas diferentes de tamaño m.

Problema 4. Sea $n \geq 2$ un número entero. Para cada pareja k de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, consideramos las sumas $S_i = 1 + 2 + \ldots + a_i$ para $1 \leq i \leq k$. Determina, en términos de n, el máximo valor posible del producto $S_1 S_2 \cdots S_k$.

Problema 5. Sea $n \geq 5$ un número entero y consideremos un n-ágono regular. Inicialmente, Nacho se posiciona en uno de los vértices del n-ágono, en el que pone una bandera. Comienza a moverse en el sentido de las agujas del reloj. Primero se desplaza una posición y pone otra bandera, luego dos posiciones y pone otra bandera, etcétera, hasta que finalmente se desplaza $n-1$ posiciones y pone una bandera, de manera que pone n banderas en total. ¿Para qué valores de n, Nacho habrá puesto una bandera en cada uno de los n vértices?

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo con circunferencia Ω. Las bisectrices ángulos B y C intersectan a Ω en M y N. Sea I el punto de intersección de estas bisectrices. Sean M' y N' las respectivas reflexiones de M y N por AC y AB. Muestra que el centro de la circunferencia que pasa por I, M', N' se encuentra en la altitud del triángulo ABC desde A.

OMM 2017

Problema 1. En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simulátnea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a través de varias tiradas, a que todos los caballos están en la columna k, uno en cada casilla. Nota. Un caballo se mueve de una casilla X a otra Y, solamente si X y Y son las esquinas opuestas de un rectángulo de 3×2 o de 2×3.

Problema 2. Un conjunto de n números enteros positivos distintos es equilibrado, si el promedio de cualesquiera k números del conjunto es un número entero, para toda $1 \leq k \leq n$. Encuentra la mayor suma que pueden tener los elementos de un conjunto equilibrado, con todos sus elementos menores o iguales que 2017.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuyo ortocentro es el punto H. La circunferencia que pasa por los puntos B, H y C vuelve a intersectar a las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de HB y HC con el segmento DE, respectivamente. Se consideran los puntos X e Y (distintos de A) que están sobre las recta AP y AQ, respectivamente, de manera que los puntos X, A, H y B están sobre un círculo y los puntos Y, A, H y C están sobre un círculo. Muestra que las rectas XY y BC son paralelas.

Problema 4. Un subconjunto B de $\{1, 2, \ldots, 2017\}$, tiene la propiedad T si cada tres números de B son las longitudes de los lados de un triángulo (de área positiva). Determina la mayor cantidad de números que puede tener un conjunto B que tenga la propiedad T.

Problema 5. Sobre una circunferencia Γ se encuentran los puntos A, B, N, C, D y M colocados en el sentido de las manecillas del reloj de manera que M y N son los puntos medios de los arcos DA y BC (recorridos en el sentido de las manecillas del reloj). Sea P la intersección de los segmentos AC y BD; y sea Q un punto sobre MB de manera que las rectas PQ y MN son perpendiculares. Sobre el segmento MC se considera un punto R de manera que $QB = RC$. Muestra que AC pasa por el punto medio del segmento QR.

Problema 6. Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera. En cada turno, A elige dos urnas y coloca un voto en cada una de ellas. Posteriormente, B elige una urna, y elimina todos los votos de esa. A gana si logra que haya una urna con n votos después de algún turno de B. Determina para cada n el mínimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.

OMM 2016

Problema 1. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes externamente en S tales que el radio de $\mathcal{C}_2$ es el triple del radio de $\mathcal{C}_1$. Sea ℓ una recta que es tangente a $\mathcal{C}_1$ en P y tangente a $\mathcal{C}_2$ en Q, con P y Q distintos de S. Sea T el punto en $\mathcal{C}_2$ tal que TQ es diámetro de $\mathcal{C}_2$ y sea R la intersección de la bisectriz de $\angle SQT$ con el segmento ST . Demuestra que $QR = RT$.

Problema 2. Una pareja de enteros positivos m, n es "guerrera"si existen enteros positivos a, b, c, d con $m = ab, n = cd$ y $a+b = c+d$. Por ejemplo, la pareja $8, 9$ es guerrera pues $8 = 4 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ y $4 + 2 = 3 + 3$. Se colorean los enteros positivos de la siguiente manera: Empezamos coloreando el 3 y el 5. Después, si algún entero positivo no está coloreado y este tiene una pareja guerrera que ya está coloreado, entonces lo coloreamos. Encuentra todos los enteros positivos que eventualmente se colorean.

Problema 3. Encuentra el menor número real x que cumpla todas las siguientes desigualdades:

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor x^2 \rfloor < \lfloor x^3 \rfloor < \ldots \lfloor x^n \rfloor < \lfloor x^{n+1} \rfloor < \ldots$$

Nota: $\lfloor x \rfloor$ es el mayor número entero menor o igual a x, es decir, es el único entero que cumple que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Problema 4. Decimos que un número entero no-negativo n "contiene" a otro número entero no-negativo m, si los dígitos de su expansión (o desarrollo) decimal aparecen en forma consecutiva en la expansión (o desarrollo) decimal de n. Por ejemplo, 2016 contiene a $2, 0, 1, 6, 20, 16, 201$ y 2016. Determina el mayor número entero n que no contiene a ningún múltiplo de 7.

Problema 5. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en orden, por renglones, de manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n, en el segundo los números de $n+1$ a $2n$, y así sucesivamente. Una operación permitida en la cuadrícula consiste en escoger cualesquiera dos cuadraditos que compartan un lado y sumar (o restar) el mismo número entero a los dos números que aparecen en esos cuadraditos. Por ejemplo, abajo se muestran dos operaciones sucesivas permitidas en una cuadrícula de 4×4: primero restando 7 a los cuadraditos sombreados y luego sumando 5 a los sombreados.

Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadraditos tengan escrito el número 0 después de repetir la operación tantas veces como sea necesario y, en los casos en que sea posible, determina el mínimo número de operaciones necesarias.

Problema 6. Sean $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, ℓ_1 la recta paralela a BC que pasa por A y ℓ_2 la recta paralela a AD que pasa por B. La recta DC corta a ℓ_1 y ℓ_2 en los puntos E y F, respectivamente. La recta perpendicular a ℓ_1 que pasa por A corta a BC en P y la recta perpendicular a ℓ_2 por B corta a AD en Q. Sean Γ_2 y Γ_1 las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos ADE y BFC, respectivamente. Demuestra que Γ_1 y Γ_2 son tangentes si y sólo si DP es perpendicular a CQ.

OMM 2015

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea H su ortocentro. Sea PQ un segmento que pasa por H con P en AB, Q en AC y tal que $\angle PHB = \angle CHQ$. Finalmente en el circuncírculo del triángulo ABC, considera M el punto medio del arco BC que no contiene a A. Muestra que $MP = MQ$.

Problema 2. Sea n un entero positivo y k un entero entre 1 y n. Se tiene un tablero de $n \times n$ color blanco. Se hace el siguiente proceso. Se dibujan k rectángulos con lados de longitud entera, con lados paralelos a los del tablero y tales que su esquina superior derecha coincide con la del tablero. Luego, estos k rectángulos se rellenan de negro. Esto deja una figura blanca en el tablero. ¿Cuántas figuras blancas diferentes podemos obtener, que no se puedan obtener haciendo el proceso con menos de k rectángulos?

Nota: A continuación se muestra un ejemplo para un tablero de 6×6. Se dibujan 3 rectángulos, uno de 1×5, uno de 2×4 y uno de 4×2, para obtener la figura blanca indicada en el tablero de la derecha.

Problema 3. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números enteros positivos. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función, la cual asigna a cada número entero positivo, un número entero positivo. Supón que f satisface las siguientes dos condiciones: a) $f(1) = 1$. b) Para todos a, b enteros positivos, se cumple que

$$f(a + b + ab) = a + b + f(ab).$$

Encuentra el valor de $f(2015)$.

Problema 4. Sea n un entero positivo. María escribe en un pizarrón las n^3 ternas que se pueden formar tomando tres enteros, no necesariamente distintos, entre 1 y n, incluyéndolos. Después, para cada una de las ternas, María determina el mayor (o los mayores, en caso de que haya más de uno) y borra los demás. Por ejemplo, en la terna $(1, 3, 4)$ borrará los números 1 y 3, mientras que en la terna $(1, 2, 2)$ borrará sólo el número 1. Muestra que, al terminar este proceso, la cantidad de números que quedan escritos en el pizarrón no puede ser igual al cuadrado de un número entero.

Problema 5. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Muestra que los puntos D, J y E son colineales.

Problema 6. Sea n un entero positivo y sean $d_1, d_2, \dots, d_k$ todos sus divisores positivos ordenados de menor a mayor. Considera el número

$$f(n) = (-1)^{d_1} d_1 + (-1)^{d_2} d_2 + \cdots + (-1)^{d_k} d_k$$

Por ejemplo, los divisores positivos de 10 son 1, 2, 5 y 10, así que

$$f(10) = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^5 \cdot 5 + (-1)^{10} \cdot 10 = 6.$$

Supón que $f(n)$ es una potencia de 2. Muestra que si m es un entero mayor que 1, entonces m^2 no divide a n.

OMM 2014

Problema 1. Cada uno de los números del 1 al 4027 se ha coloreado de verde o de rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde. Diremos que dos enteros positivos m y n son çuates"si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es un número primo. Un paso consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números. Muestra que después de realizar algunos pasos es posible hacer que todos los números del 1 al 2014 sean verdes.

Problema 2. Un entero positivo a *se reduce* a un entero positivo b, si al dividir a entre su dígito de las unidades se obtiene b. Por ejemplo, 2015 se reduce a $\frac{2015}{5} = 403$. Encuentra todos los enteros positivos que, mediante algunas reducciones, llegan al número 1. Por ejemplo, el número 12 es uno de tales enteros pues 12 se reduce a 6 y 6 se reduce a 1.

Problema 3. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA intersecta de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE intersecta a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Muestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

Problema 4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD tal que E es el punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G). Muestra que la circunferencia que pasa por D, FyG es tangente BG.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

y determina para qué números a, b y c se alcanza la igualdad.

Problema 6. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n. Por ejemplo, los divisores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6, por lo que $d(6) = 4$. Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$n + d(n) = d(n)^2.$$

OMM 2013

Problema 1. Se escriben los números primos en orden, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ Encuentra todas las parejas de números enteros positivos a y b con $a - b \geq 2$, tales que $p_a - p_b$ divide al número entero $2(a - b)$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con ángulo obtuso en A. Sea P un punto sobre el segmento BD de manera que la circunferencia con centro en P y que pasa por A, corte a la recta AD en A y Y, y corte a la recta AB en A y X. La recta AP intersecta a BC en Q y a CD en R, respectivamente. Muestra que $\angle XPY = \angle XQY + \angle XRY$.

Problema 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puedes tomar del conjunto de números enteros $\{1, 2, \ldots, 2013\}$, de tal manera que entre ellos no haya tres distintos, digamos a, b, c, tales que a sea divisor o múltiplo de $b - c$?

Problema 4. Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos negros y otros blancos, de manera que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos negros y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios. Por ejemplo, en la ilustración, se muestra una posible rebanada del cubo de $6 \times 6 \times 6$ (formada por 6 subprismas de $1 \times 6 \times 1$). Muestra que es posible sustituir la mitad de los cubitos negros por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito negro.

Problema 5. Una pareja de enteros es especial si es de la forma $(n, n - 1)$ o de la forma $(n - 1, n)$ con n un entero positivo. Muestra que una pareja (n, m) de enteros positivos que no es especial, se puede representar como suma de dos o más parejas especiales diferentes si y sólo si los enteros n y m satisfacen la desigualdad $n + m \geq (n - m)^2$.

Problema 6. Sea $A_1A_2 \ldots A_8$ un octágono convexo, es decir, un octágono donde todos sus ángulos internos son menores que $180°$. Además los lados del octágono tienen la misma longitud y cada par de lados opuestos son paralelos. Para cada $i = 1, \ldots, 8$, definamos el punto B_i como la intersección del segmento A_iA_{i+4} con el segmento $A_{i-1}A_{i+1}$, donde $A_{j+8} = A_j$ y $B_{j+8} = B_j$, para todo número entero j. Muestra que para algún número i, de entre los números $1, 2, 3$ y 4, se cumple que

$$\frac{A_iA_{i+4}}{B_iB_{i+4}} \leq \frac{3}{2}$$

OMM 2012

Problema 1. Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en P. Considera un punto Q sobre ℓ, distinto de P, y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ intersecta a $\mathcal{C}_1$ en S y la recta PS intersecta a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Problema 2. Sea $n \geq 4$ un número par. Considera una cuadrícula de $n \times n$. Dos celdas (cuadritos de 1×1) son vecinas si comparten un lado, si están en extremos opuestos de un mismo renglón o si están en extremos opuestos de una misma columna. De esta forma, toda celda en la cuadrícula tiene exactamente cuatro celdas vecinas. En cada celda está escrito un número del 1 al 4 de acuerdo con las siguientes reglas:

Si en una celda está escrito un 2 entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un 1.

Si en una celda está escrito un 3 entonces en tres o más celdas vecinas está escrito un 1.

Si en una celda está escrito un 4 entonces en las cuatro celdas vecinas está escrito un 1.

Entre los acomodos que cumplan las condiciones anteriores, ¿cual el máximo número que se puede obtener sumando los números escritos en todas las celdas?

Problema 3. Muestra que entre cualesquiera 14 números enteros consecutivos siempre hay 6 números tales que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.

Problema 4. A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el proceso aplicado al 938 es 102, ya que $\frac{938-(9+3+8)}{9} = 102$. Aplicado dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado tres veces se llega a 1, y aplicado cuatro veces se llega al 0. Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al cero, lo llamamos la casa de n. ¿ Cuántos números menores que 26000 tienen la misma casa que el 2012?

Problema 5. Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero de 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con # en la siguiente figura, entonces si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\times$. Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\circ$. Diremos que dos ranas (de cualquier color) se pueden encontrar en una casilla si ambas pueden llegar hasta ella saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos. (a) Muestra que si ponemos 6 ranas (de cualquier color), entonces hay al menos 2 que se pueden encontrar. (b) ¿Para qué valores de k es posible poner una rana roja y una rana verde de manera que haya exactamente k casillas en las que estas ranas se pueden encontrar?

Problema 6. Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo Ω. Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a Ω en D, E y F, respectivamente; y la recta MH corta a Ω en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.

OMM 2011

Problema 1. Se tienen 25 focos distribuidos de la siguiente manera: los primeros 24 se disponen en una circunferencia colocando un foco en cada uno de los vértices de un 24-ágono regular, y el foco restante se coloca en el centro de dicha circunferencia. Se permite aplicar cualquiera de las siguientes dos operaciones:

1) Tomar dos vértices sobre la circunferencia tales que hay una cantidad impar de vértices en los arcos que definen, y cambiar el estado de los focos de estos dos vértices, así como del foco del centro.

2)Tomar tres vértices sobre la circunferencia que formen un triángulo equilátero, y cambiar el estado de los focos en estos tres vértices, así como del foco del centro.

Muestra que partiendo de cualquier configuración inicial de focos encendidos y apagados, siempre es posible llegar a una configuración en la que todos los focos están encendidos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con vértices sobre una circunferencia Γ. Sea ℓ la recta tangente a Γ en A. Sean D y E los puntos de intersección de la recta ℓ y del segmento AC con la circunferencia de centro B y radio BA, respectivamente. Muestra que DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Encuentra todas las soluciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reales que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ &\vdots \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

Problema 4. Encuentra el menor entero positivo tal que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos y que es divisible entre los números del 1 al 9. Nota: un ejemplo de un número que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos es el 1121211222.

Problema 5. Considera un tablero de $(2^n - 1) \times (2^n + 1)$ casillas que se quiere dividir en rectángulos de tal forma que los lados de los rectángulos sean paralelos a los lados del tablero, de tal forma que el área (cantidad de casillas) de cada rectángulo sea una potencia de 2. Encuentra la menor cantidad de rectángulos en las que se puede dividir el tablero.

Problema 6. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias que se cortan en los puntos A y B. Consideremos un punto C sobre la recta AB de modo que B queda entre A y C. Sean P y Q puntos sobre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, tales que que CP es tangente a $\mathcal{C}_1$, CQ es tangente a $\mathcal{C}_2$, P no está dentro de $\mathcal{C}_2$ y Q no está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta PQ corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en R y a $\mathcal{C}_2$ en S, ambos puntos distintos de B. Supongamos que CR corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en X y CS corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en Y . Sea Z un punto sobre la recta XY. Muestra que SZ es paralela a QX si y sólo si PZ es paralela a RX.

OMM 2010

Problema 1. Encuentra todas las ternas de números naturales (a, b, c) tales que $abc = a + b + c + 1$.

Problema 2. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden). Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

Problema 3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersecar a $\mathcal{C}_2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y sea H la intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.

Problema 4. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de $n \times 4$, cada región es igual a

$$\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$$

Un çambio.es tomar tres casillas consecutivas en el mismo renglón y con dígitos distintos escritos en ellas y cambiar los tres dígitos de estas casillas escritas de la siguiente manera

$$0 \to 1, \quad 1 \to 2, \quad 2 \to 0.$$

Por ejemplo, un renglón $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$ puede cambiarse al renglón $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ pero no al renglón $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ pues 0, 1 y 0 no son distintos entre sí. Los cambios se pueden aplicar cuantas veces se quiera, aún a renglones ya cambiados. Muestra que para $n < 12$ no es posible hacer un número finito de cambios de forma que la suma de los números en cada una de las cuatro columnas sea la misma.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90^o$.

Problema 6. Sean p, q, r números primos positivos distintos. Muestra que si pqr divide a

$$(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1,$$

entonces $(pqr)^3$ divide a

$$3((pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1).$$

OMM 2009

Problema 1. Sea ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P , y corta a la recta AC en Q. Muestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

Problema 2. En cajas marcadas con los números $0, 1, 2, \ldots$ se van a colocar todos los enteros positivos de acuerdo con las siguientes reglas:

Si p es un número primo, este se coloca en la caja con el número 1.

Si el número a se coloca en la caja con el número m_a y b se coloca en la caja con el número m_b, entonces el producto de a y b, es decir ab, se coloca en la caja con el número $am_b + bm_a$.

Encuentra todos los enteros positivos n que cuando se coloquen queden en la caja con el número n.

Problema 3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1 \text{ y que } \frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1.$$

Problema 4. Sea $n > 1$ un entero impar y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales distintos. Sea M el mayor de estos números y sea m el menor de ellos. Muestra que es posible escoger los signos en la expresión $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ de manera que

$$m < s < M.$$

Problema 5. Considera un triángulo ABC y un punto M sobre el lado BC. Sea P la intersección de las perpendiculares a AB por M y a BC por B, y sea Q la intersección de las perpendiculares a AC por M y a BC por C. Muestra que PQ es perpendicular a AM si y solo si M es el punto medio de BC.

Problema 6. En una fiesta con n personas, se sabe que de entre cualesquiera 4 personas, hay 3 de las 4 que se conocen entre sí o hay 3 que no se conocen entre sí. Muestra que las n personas se pueden separar en dos salones de manera que en un salón todos se conocen entre sí y en el otro no hay dos personas que se conozcan entre sí. Nota. Conocerse se considera una relación mutua.

OMM 2008

Problema 1. Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ los divisores del entero positivo n. Encuentra todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

Problema 2. Considera una circunferencia Γ, un punto A fuera de Γ y las tangentes AB, AC a Γ desde A, con B y C los puntos de tangencia. Sea P un punto sobre el segmento AB, distinto de A y de B. Considera el punto Q sobre el segmento AC tal que PQ es tangente a Γ, y a los puntos R y S que están sobre las rectas AB y AC, respectivamente, de manera que RS es paralela a PQ y tangente a Γ. Muestra que el producto de las áreas de los triángulos APQ y ARS no depende de la elección del punto P .

Problema 3. Considera un tablero de ajedrez. Los números del 1 al 64 se escriben en las casillas del tablero como en la figura. Se disponen de suficientes caballos de ajedrez para colocarlos en las casillas del tablero de manera que no se ataquen entre sí. Calcula la suma de los números de las casillas donde están colocados los caballos. ¿Cuál es la suma máxima que puedes obtener? Nota. Dos caballos se atacan entre sí, cuando se encuentran en 2 esquinas opuestas de un rectángulo de 2×3 o de 3×2.

Problema 4. Un rey decide realizar un juego para premiar a uno de sus caballeros, para ello, acomoda a los n caballeros en una mesa redonda y hace que digan los números $1, 2, 3$ y repitan de nuevo $1, 2, 3$ y así sucesivamente (lo dicen en el sentido de las manecillas del reloj y cada persona dice un número). Las personas que dicen 2 ó 3 son retiradas inmediatamente y el juego continúa hasta que queda un sólo caballero, el ganador. Se numeran las personas del 1 al n conforme al primer turno. Encuentra todos los valores de n de tal manera que el ganador sea el caballero 2008.

Problema 5. En los vértices de un cubo están escritos 8 enteros positivos distintos y en cada una de las aristas del cubo está escrito el máximo común divisor de los números que están en los 2 vértices que forman a la arista. Sean A la suma de los números escritos en las aristas y V la suma de los números escritos en los vértices. Muestra que $\frac{2}{3}A \leq V$. ¿Es posible que $A = V$?

Problema 6. Las bisectrices internas de los ángulos A, B y C de un triángulo ABC concurren en I y cortan al circuncírculo de ABC en L, M, N, respectivamente. La circunferencia de diámetro IL corta al lado BC, en D y E; la circunferencia de diámetro IM corta al lado CA en F y G; la circunferencia de diámetro IN corta al lado AB en H y J. Muestra que D, E, F, G, H, J están sobre una misma circunferencia.

OMM 2007

Problema 1. Encuentra todos los enteros positivos N con la siguiente propiedad: entre todos los divisores positivos de N hay 10 números consecutivos pero no 11.

Problema 2. Dado un triángulo equilátero ABC, encuentra todos los puntos P del plano que cumplan $\angle APB = \angle BPC$.

Problema 3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $a + b + c = 1$. Muestra que

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$

Problema 4. Para un entero positivo n se definen: n_1 como la suma de los dígitos de n, n_2 como la suma de los dígitos de n_1 y n_3 como la suma de los dígitos de n_2. Por ejemplo para $n = 199, n_1 = 19, n_2 = 199_2 = 10$ y $n_3 = 199_3 = 1$. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que $m + n = 2007$ y $m_3 + n_2 = 2007_3$.

Problema 5. En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa. Muestra que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

Problema 6. Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Muestra que $BD = AC$ si y sólo si $\angle BAC = 2\angle ABM$.

OMM 2006

Problema 1. Sea ab un número entero d dos dígitos. Un entero positivo n es "pariente"de ab si el dígito de las unidades de n también es b, y los otros dígitos de n son distintos de cero y suman a. Por ejemplo, los parientes de 31 son 31, 121, 211 y 1111. Encuentra todos los números de dos dígitos que dividen a todos sus parientes.

Problema 2. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, tal que $AB < AC$. Sean M el punto medio de BC y D la intersección de AC con la perpendicular a BC que pasa por M. Sea E la intersección de la paralela a AC que pasa por M con la perpendicular a BD que pasa por B. Muestra que los triángulos AEM y MCA son semejantes si y solo si $\angle ABC = 60^o$.

Problema 3. Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar todos los números $1, 2, 3, \ldots 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

Problema 4. ¿Para qué enteros positivos n puede cubrirse una escalera como la de la figura (pero con n escalones en vez de 4) con n cuadrados de lados enteros, no necesariamente del mismo tamaño, sin que estos cuadrados se encimen y sin que sobresalgan del borde de la figura?

Problema 5. Sean ABC un triángulo acutángulo y AD, BE y CF sus alturas. La circunferencia con diámetro AD corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sean P u Q los puntos de intersección de AD con EF y MN, respectivamente. Muestra que Q es el punto medio de PD.

Problema 6. Sea n la suma de los dígitos de un entero positivo A. Decimos que A es "surtido"si cada uno de los enteros $1, 2, 3, \ldots, n$ es la suma de algunos dígitos de A. Muestra que si $1, 2, \ldots, 8$ son sumas de algunos dígitos de un entero A, entonces A es surtido. Si $1, 2, \ldots, 7$ son sumas de algunos dígitos de un entero A, ¿es A necesariamente surtido?

Nota: El número 117 no es surtido porque no se puede sumar 3 con algunos de sus dígitos, y $3 < 1 + 1 + 7$.

OMM 2005

Problema 1. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, y sea P un punto cualquiera del segmento BC ($P \neq B$ y $P \neq C$). Supón que la circunferencia circunscrita al triángulo BPO corta al segmento AB en R ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al triángulo COP corta al segmento CA en el punto Q ($Q \neq C$ y $Q \neq A$). Muestra que el triángulo PQR que es semejante al triángulo ABC y su ortocentro es O. A demás, muestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos BPO, COP, PQR son todas del mismo tamaño.

Problema 2. Dadas varias cuadrículas del mismo tamaño con números escritos en sus casillas, su suma se efectúa sumando las casillas que están en la misma posición, creando una cuadrícula del mismo tamaño. Dado un entero positivo N, diremos que una cuadrícula es N-balanceada si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números escritos en cualesquiera dos casillas que comparten un lado es menor o igual a N. Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de dos cuadrículas n-balanceadas. A demás, muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de tres cuadrículas n-balanceadas.

Problema 3. Determina todas las parejas (a, b) de números enteros distintos de cero para las cuales es posible encontrar un entero entero positivo x primo relativo con b y un entero cualquiera y, tales que en la siguiente lista hay una infinidad de números enteros:

$$\frac{a+xy}{b}, \frac{a+xy^2}{b^2}, \frac{a+xy^3}{b^3}, \ldots, \frac{a+xy^n}{b^n}, \ldots$$

Problema 4. Decimos que una lista de números enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ contiene una terna aritmética a_i, a_j, a_k si $i < j < k$ y $2a_j = a_i + a_k$. Por ejemplo, $8, 1, 5, 3, 7$ tiene una terna aritmética $(8, 5, 2)$ pero $8, 1, 2, 5, 7$ no. Sea n un entero positivo. Muestra que los números $1, 2, 3, \ldots, n$ se pueden reordenar en una lista que no contenga ternas aritméticas.

Problema 5. Sea N un número entero mayor que 1. En cierta baraja de N^3 cartas, cada carta está pintada de uno de N colores distintos, tiene dibujada una de N posibles figuras,¡ y tiene escrito un número entero del 1 al N (no hay dos cartas idénticas). Una colección de cartas de la baraja se llama completa si tiene cartas de todos los colores, o si entre sus cartas aparecen todas las figuras o todos los números. ¿Cuántas colecciones no completas tienen la propiedad de que, al añadir cualquier otra carta de la baraja, se vuelven completas?

Problema 6. Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D un punto del lado BC. Sea E un punto del segmento BC tal que $BD = EC$. Por E se traza ℓ, la recta paralela a AD. Sea P un punto en ℓ y dentro del triángulo ABC. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.

OMM 2004

Problema 1. Encuentra todos los números primos p, q, r con $p < q < r$, tales que $25pq + r = 2004$ y que $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

Problema 2. ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos a y b (Con $a \neq b$) cumplan que $|a - b| \geq \frac{ab}{100}$?

Problema 3. Sean Z y Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB y CA, respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del lado BC corta a CA en N. Sea L el punto del segmento CA tal que $NL = AB$ (con L y A del mismo lado con respecto a N). La recta ML corta a AB en K. Muestra que $KA = NC$.

Problema 4. Al final de un torneo de fútbol en el que cada par de equipos jugó entre sí exactamente una vez y donde no hubo empates, se observó que para cualesquiera tres equipos A, B y C, si A le ganó a B y B le ganó a C, entonces A le ganó a C. Cada equipo calculó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número de partidos que perdió. La suma de todas estas diferencias resultó ser 5000. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo? Encuentra todas las respuestas posibles.

Problema 5. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos circunferencias tales que el centro O de $\mathcal{B}$ esté en $\mathcal{A}$. Sean C y D los dos puntos de intersección de las circunferencias. Se toman un punto A en $\mathcal{A}$ y un punto B en $\mathcal{B}$ tales que AC es tangente a $\mathcal{B}$ en C y BC es tangente a $\mathcal{A}$ en el mismo punto C. El segmento AB corta de nuevo a $\mathcal{B}$ en E y ese mismo segmento corta de nuevo a $\mathcal{A}$ en F. La recta CE vuelve a cortar a $\mathcal{A}$ en G y la recta CF corta a la recta GD en H. Muestra que el punto de intersección de GO y EH es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo DEF.

Problema 6. ¿Cuál es el mayor número posible de cambios de dirección en un recorrido sobre las líneas de una cuadrícula de 2004×2004 casillas, si el recorrido no pasa dos veces por el mismo lugar?

OMM 2003

Problema 1. Dado un número entero k de dos o más cifras, se forma otro número entero m insertando un cero entre la cifra de las unidades y la de las decenas de k. Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser un múltiplo de k.

Problema 2. Sean A, B y C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea $\mathcal{Y}$ una circunferencia tangente a AC en B, sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ las circunferencias de diámetros AB y BC, respectivamente. Sea P el punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$. Supón que la recta PQ corta a $\mathcal{X}$ en un punto R distinto de P y que esta misma recta PQ corta a $\mathcal{Z}$ en un punto S distinto de Q. Muestra que concurren AR, CS y la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ por B.

Problema 3. En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supón que a cada muchacha le gustan a muchachos y a cada muchacho le gustan b muchachas. Para qué valores de a y b es correcto afirmar que hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralelo a DC. Se toman puntos P y Q en los lados AB y CD, respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea M la intersección de AQ con DP y sea N la intersección de PC con QB. Muestra que la longitud de MN depende únicamente de las longitudes de AB y CD, y calcula su valor.

Problema 5. Se escriben en tarjetas todas las parejas de números enteros (a, b) con $1 \leq a < b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue; cada jugador en su turno elige (a, b) (que se retira del juego) y escribe el producto $a \cdot b$ en un pizarrón (ambos jugadores usan el mismo pizarrón). Pierde el jugador que ocasione que el máximo común divisor de los números escritos hasta el momento sea 1. ¿Quién tiene estrategia ganadora? (Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método con el cual asegura su triunfo?).

Problema 6. Dado un número entero n, un cambio sensato consiste en sustituir n por $2n+1$ o $3n+2$. Dos enteros positivos a y b se llaman compatibles si existe un entero que se puede obtener haciendo uno o más cambios sensatos, tanto a partir de a, como a partir de b. Encuentra todos los enteros positivos compatibles con 2003 menores que 2003.

OMM 2002

Problema 1. En una cuadrícula de 32×32 se escriben los números del 1 al 1024 de izquierda a derecha, con los números del 1 al 32 en el primer renglón, los del 33 al 64 en el segundo, etc.

La cuadrícula se divide en cuatro cuadrículas de 16×16:
Estas cuadrículas se cambian de lugar entre sí, y queda el siguiente arreglo:
Después, cada cuadrícula de 16×16 se divide en cuatro cuadrículas de 8×8 que se cambian de lugar del mismo modo; a su vez cada una de esas se divide y así sucesivamente hasta llegar a cuadrículas de 2×2 que se dividen en cuadros de 1×1, los cuales se cambian de lugar del mismo modo.

Al terminar estas operaciones, ¿qué números quedan en la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha en la cuadrícula de 32×32?

Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo y Γ el circuncírculo del triángulo ABD. Sean E y F las intersecciones de Γ con los lados BC y CD (o sus prolongaciones), respectivamente. Muestra que el circuncentro del triángulo CEF está en Γ.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Entre los divisores positivos de n^2, ¿Hay más de la forma $4k + 1$ o $4k - 1$?

Problema 4. Una ficha de dominó tiene dos números (que pueden ser iguales) entre 0 y 6. Las fichas se pueden voltear, es decir, $\boxed{4|5}$ es la misma ficha que $\boxed{5|4}$. Se quiere formar una hilera de fichas de dominó distintas de manera que en cada momento de la construcción de la hilera, la suma de todos los números de fichas puestas hasta ese momento sea impar. Las fichas se pueden agregar de la manera usual a ambos lados de la hilera, es decir, de manera que en cualesquiera dos fichas consecutivas aparezca el mismo número en los extremos que se juntan. Por ejemplo, se podría hacer la hilera: $\boxed{1|3}$, $\boxed{3|4}$, $\boxed{4|4}$, en la que se colocó primero la ficha del centro y luego la de la izquierda para mantener la suma impar. ¿Cuál es la mayor cantidad de fichas que de pueden colocar en una hilera? ¿Cuántas hileras de esa longitud máxima se pueden construir?

Problema 5. Tres números enteros distintos forman una terna compatible si alguno de ellos, digamos n, cumple que cada uno de los otros dos es, o bien divisor, o bien múltiplo de n. Para cada terna compatible de números entre 1 y 2002 se calcula la suma de los tres números de la terna. ¿Cuál es la mayor suma obtenida? ¿Cuáles son las ternas en las que se obtiene suma máxima?

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y con el ángulo $\angle CMD$ recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto medio de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Muestra que el ángulo $\angle AKB$ es recto y que $\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1$.

OMM 2001

Problema 1. Encuentra todos los números enteros de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y de 7, y cada uno de cuyos dígitos es 3 o 7.

Problema 2. Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Muestra que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.

Problema 3. En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. Una circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S en el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Muestra que $AT = RC$.

Problema 4. Dados dos enteros positivos n y a se forma una lista de 2001 números enteros como sigue: El primer número es a; a partir del segundo, cada número es el residuo que se obtiene al dividir el cuadrado del anterior entre n. A los números de la lista se les ponen los signos $+$ y $-$ alternadamente empezando con $+$. Los números con signo así obtenidos se suman y a esa suma se le llama suma final para n y a. ¿Para qué números enteros $n \geq 5$ existe alguna a tal que $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$ y la suma final para n y a es positiva?

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$ y el ángulo $\angle BAC$ es el doble del ángulo $\angle BCA$. EN el lado AC se toma un punto D tal que $CD = AB$. Por el punto B se traza una recta ℓ paralela a AC. La bisectriz exterior del ángulo en A intersecta a ℓ en el punto M, y la paralela a AB por el punto C intersecta a ℓ en el punto N. Muestra que $MD = ND$.

Problema 6. Un coleccionista de monedas raras tiene monedas de denominaciones $1, 2, 3, \ldots, n$ (tiene muchas monedas de cada denominación). Desea poner algunas de sus monedas en 5 cajas de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

a) En cada caja hay a lo más una moneda de cada denominación.

b) Todas las cajas tienen el mismo número de monedas y la misma cantidad de dinero.

c) Para cualesquiera dos cajas sucede que entre las dos tienen por lo menos una moneda de cada denominación.

d) No existe una denominación tal que todas las cajas tengan una moneda de esta denominación

¿Para qué valores de n puede el coleccionista hacer lo que se propone?

OMM 2000

Problema 1. Existen circunferencias A, B, C, D en el plano tales que las circunferencias A y B son tangentes externamente en P, B y C en Q, C y D en R, y D y A en S. Las circunferencias A y C no se encuentran, ni tampoco B y D. Muestra que los puntos P, Q, R, S se encuentran en una misma circunferencia.

Supongamos que A y C tienen radio $2, B$ y D tienen radio 3, y la distancia entre los centros de A y C es 6. Calcula el área del cuadrilátero $PQRS$.

Problema 2. Se construye un triángulo de números de la siguiente manera. La primera fila está formada por los números de 1 a 2000 en orden creciente, y debajo de dos números consecutivos cualesquiera se escribe su suma. ¿Cuál es el número de la última fila?

Problema 3. Dado un conjunto A de enteros positivos, el conjunto A' se compone de los elementos de A y de todos los enteros positivos que se pueden obtener de la siguiente manera: Se escriben algunos elementos de A uno tras otro sin repetir, se escribe un signo $+$ o $-$ antes de cada uno de ellos, y se evalúa la expresión obtenida. El resultado se incluye en A'.
Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$, los números 8 y $14 = 20 - 2 + 8$ son elementos de A'.
El conjunto A'' se construye a partir de A' de la misma manera.
Hallar el menor número posible de elementos de A, si A'' contiene todos los enteros de 1 a 40.

Problema 4. Sean a y b enteros positivos que no son múltiplos de 5. Se construye una sucesión de enteros como sigue: el primer término es 5, y cada término siguiente se obtiene multiplicando el anterior por a y añadiendo b. (Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 4$, los tres primeros términos son $5, 14, 32$.) ¿Cuál es el máximo número posible de números primos en la secuencia que pueden aparecer antes de que haya un término compuesto?

Problema 5. Un tablero $n \times n$ está coloreado en blanco y negro como un tablero de ajedrez. Se pueden realizar los siguientes pasos: Elegir un rectángulo dentro del tablero (formado por casillas enteras) cuyas longitudes de los lados sean ambas impares o ambas pares, pero no ambas iguales a 1, e invertir los colores de todas las casillas dentro del rectángulo. Determinar los valores de n para los que es posible hacer que todas las celdas tengan el mismo color en un número finito de dichos pasos.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $\angle B > 90^o$ tal que existe un punto H en el lado AC con $AH = BH$ y BH perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC respectivamente. La recta que pasa por H paralela a AB corta a DE en F. Muestra que $\angle BCF = \angle ACD$.

OMM 1999

Problema 1. En una mesa hay 1999 fichas, rojas en un lado y negras en el otro, colocadas aleatoriamente. Dos personas realizan movimientos alternados, donde cada movimiento es de uno de los dos tipos siguientes:

(1) Retirar varias fichas que tengan todas el mismo color hacia arriba;

(2) Invertir varias fichas que tienen todas el mismo color hacia arriba.

Gana el jugador que se lleva la última ficha. Determina cuál de los dos jugadores (el que juega primero o el otro) tiene una estrategia ganadora.

Problema 2. Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética, todos ellos menores que 12345.

Problema 3. Sea P un punto dentro de el triángulo ABC. Sean D, E, F los puntos medios de AP, BP, CP, y sean L, M, N los puntos de intersección de BF y CE, AF y CD, AE y BD, respectivamente. Muestra que DL, EM y FN son concurrentes.

Problema 4. Un tablero de 8×8 está dividido en cuadritos unitarios. Diez de estos cuadritos tienen sus centros marcados. Muestra que existen dos centros marcados que están a lo más a $\sqrt{2}$ de distancia, o existe un centro marcado a $1/2$ o menos del borde del tablero.

Problema 5. En un cuadrilátero $ABCD$ con $AB \parallel CD$, las bisectrices externas de los ángulos en B y C se intersectan en P, y que las bisectrices externas de los ángulos en A y D se encuentran en Q. Muestra que la longitud de PQ es igual al semiperímetro de $ABCD$.

Problema 6. Un polígono tiene lados de longitud entera, y cada par de lados adyacentes perpendiculares (no es necesariamente convexo). Muestra que si el polígono puede ser cubierto por dominós de 2×1 no superpuestos, entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

OMM 1998

Problema 1. Un número se llama suertudo si al calcular la suma de los cuadrados de sus dígitos y repetir esta operación un número suficiente de veces se obtiene el número 1. Por ejemplo, 1900 es suertudo, ya que $1900 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1$. Encuentra infinitas parejas de números suertudos consecutivos.

Problema 2. Los rayos l y m salen del mismo punto y forman un ángulo a. Sea P un punto fijo en l. Para cada circunferencia C tangente a l en P y que corta a m en Q y R, sea T el punto de intersección de la bisectriz del ángulo QPR con C. Describe el lugar geométrico de T y justifica tu respuesta.

Problema 3. Cada lado y diagonal de un octógono regular está coloreado de rojo o negro. Demuestra que hay al menos siete triángulos cuyos vértices son vértices del octógono y sus tres lados son del mismo color.

Problema 4. Encuentra todos los enteros que se pueden escribir de la forma $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + ... + \frac{9}{a_9}$, tales que $a_1, a_2, ..., a_9$ son dígitos distintos de 0, no necesariamente distintos.

Problema 5. Las tangentes en los puntos B y C de una circunferencia dada se intersectan en el punto A. Sea Q un punto del segmento AC tal que BQ vuelva a encontrarse con la circunferencia en P. La recta que pasa por Q paralela a AB corta a BC en J. Muestra que PJ es paralela a AC si y sólo si $BC^2 = AC \cdot QC$.

Problema 6. Un plano en el espacio es equidistante de un conjunto de puntos si las distancias del plano a los puntos del conjunto son iguales. ¿Cuál es el mayor número posible de planos equidistantes de cinco puntos, de los cuales cuatro no son coplanares?

OMM 1997

Problema 1. Encuentra todos los números primos p tales que $8p^4 - 3003$ es un número primo positivo.

Problema 2. En el triángulo ABC, P y P' son puntos del lado BC, Q del lado CA, y R del lado AB, tales que

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}$$

. Sea G el centroide del triángulo ABC y K el punto de intersección de AP' y RQ. Muestra que los puntos P, G, K son colineales.

Problema 3. Se escriben los números del 1 al 16 en las casillas de un tablero de 4×4.

Muestra que se pueden acomodar los números de manera que dos números cualesquiera en las celdas que comparten un lado tengan diferencia máxima de 4.

Muestra que no se pueden acomodar los números de manera que dos números cualesquiera en las celdas que comparten un lado tengan diferencia máxima de 3.

Problema 4. ¿Cuál es el número mínimo de planos determinados por 6 puntos en el espacio tales que no son todos coplanares, y entre los cuales no hay tres colineales?

Problema 5. Sean P, Q, R puntos de los lados BC, CA, AB respectivamente de un triángulo ABC. BQ y CR se intersectan en A', AP y CR se intersectan en B', y AP y BQ se intersectan en C', de modo que $AB' = B'C', BC' = C'A'$, y $CA' = A'B'$. Encuentra el valor de el cociente entre el área del $\triangle PQR$ y el área del $\triangle ABC$.

Problema 6. Muestra que el número 1 tiene infinitas representaciones de la forma

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n},$$

donde n y a_i son enteros positivos, y $5 < a_1 < a_2 < ... < a_n$.

OMM 1996

Problema 1. Sean P y Q puntos de la diagonal BD de un cuadrilátero $ABCD$ tal que $BP = PQ = QD$. Sea E el punto de intersección de AP y BC, y F el punto de intersección de AQ con DC. Muestra que $ABCD$ es un paralelogramo si y solo si E y F son los puntos medios de BC y DC, respectivamente.

Problema 2. Alrededor de una mesa circular hay 64 cabinas y en cada una hay una ficha. Las fichas y las cabinas correspondientes están numeradas de 1 a 64 en este orden. En el centro de la mesa hay 1996 bombillas que están apagadas. Cada minuto las fichas se mueven simultáneamente de forma circular (siguiendo el sentido de la numeración) de la siguiente manera: la ficha 1 se mueve una cabina, la ficha 2 se mueve dos cabinas, etc., de forma que más de una ficha puede estar en la misma cabina. Cada vez que una ficha comparte cabina con la ficha 1, se enciende una bombilla. ¿Dónde está la ficha 1 en el primer minuto en el que están encendidas todas las bombillas?

Problema 3. Muestra que no es posible cubrir un tablero cuadrado de 6×6 con dieciocho rectángulos de 2×1, tal que cada una de las líneas interiores de la cuadrícula corte al menos uno de los rectángulos. Muestra también que es posible cubrir un rectángulo de 6×5 con quince rectángulos de 2×1 de forma que se cumpla la condición anterior.

Problema 4. ¿Para qué números enteros $n \geq 2$ se pueden escribir los números 1 a 16, cada uno en un cuadrito de un papel cuadriculado de 4×4 de forma que las 8 sumas de los números en las filas y columnas sean todas diferentes y divisibles por n?

Problema 5. Los números de 1 a n^2 se escriben en un papel cuadriculado de $n \times n$ en el orden normal. Cualquier secuencia de pasos hacia la derecha y hacia abajo de un cuadrado a otro adyacente (compartiendo lado) que comienza en el cuadrado 1 y termina en el cuadrado n^2 se llama camino. Denotemos por $L(C)$ la suma de los números por los que pasa el camino C.

Para un n fijo, sean M y m el mayor y menor valor de $L(C)$ posibles. Muestra que $M - m$ es un cubo perfecto.

Muestra que para ningún n se puede encontrar un camino C con $L(C) = 1996$.

Problema 6. En un triángulo ABC con $AB < BC < AC$, los puntos A', B', C' son tales que $AA' \perp BC$ y $AA' = BC, BB' \perp CA$ y $BB' = CA$, y $CC' \perp AB$ y $CC' = AB$, como se muestra en la figura. Si $\angle AC'B$ es un ángulo recto, muestra que los puntos A', B', C' son colineales.

OMM 1995

Problema 1. N estudiantes están sentados en los pupitres en un arreglo de $m \times n$, donde $m, n \geq 3$. Cada alumno le da la mano a los alumnos que están adyacentes horizontal, vertical o diagonalmente. Si hay 1020 apretones de manos en total, ¿cuál es el valor de N?

Problema 2. Existen 6 puntos en el plano tales que 8 de las distancias entre ellos son iguales a 1. Muestra que hay al menos 3 puntos que forman un triángulo equilátero.

Problema 3. A, B, C, D son vértices consecutivos de un polígono regular de 7 vértices. AL y AM son tangentes a la circunferencia centro C radio CB. Sea N el punto de intersección de AC y BD. Muestra que L, M, N son colineales.

Problema 4. Encuentra 26 elementos de $\{1, 2, 3, ..., 40\}$ tales que el producto de dos de ellos nunca sea un cuadrado perfecto. Muestra que no se pueden encontrar 27 elementos que cumplan esta condición.

Problema 5. $ABCDE$ es un pentágono convexo tal que los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB tienen áreas iguales. Muestra que (1/4) área $(ABCDE) <$ área $(ABC) <$ (1/3) área $(ABCDE)$.

Problema 6. Se coloca un 1 o 0 en cada casilla de un tablero de 4×4. Se pueden cambiar de 0 a 1 y vice versa cada número de una fila, columna, o diagonal (hay 14 diagonales de longitudes 1 a 4). ¿Para qué arreglos se pueden hacer cambios de manera que únicamente queden 0s?

OMM 1994

Problema 1. La secuencia $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, ...$ se forma de la siguiente manera: Primero tomamos un número impar, luego dos números pares, luego tres números impares, luego cuatro números pares, y así sucesivamente. Encuentre el número de la secuencia que más se acerque a 1994.

Problema 2. Los 12 números en un reloj se reordenan. Muestra que existen tres números consecutivos con suma 21 o más.

Problema 3. $ABCD$ es un paralelogramo. Sea E un punto en la recta AB tal que $BE = BC$ y B está entre A y E. La recta por C perpendicular a BD y la recta por E perpendicular a AB se intersectan en F. Muestra que $\angle DAF = \angle BAF$.

Problema 4. Un matemático caprichoso escribe un libro con páginas numeradas del 2 al 400. Las páginas las lee en el siguiente orden: El matemático toma la última página no leída (400), luego lee (en el orden normal) todas las páginas que no son relativamente primas a ella y que no se han leído antes. Repite este proceso hasta que haya leído todas las páginas. Así, el orden sería $2, 4, 5, ..., 400, 3, 7, 9, ..., 399, ...$ ¿Cuál es la última página que lee el matemático caprichoso?

Problema 5. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo. Se toman los 12 puntos que son los pies de las alturas de los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB. Demuestra que al menos uno de estos puntos está sobre un lado de $ABCD$.

Problema 6. Muestra que es imposible embaldosar un tablero de 10×10 con 25 piezas del tipo A, ni con 25 piezas del tipo B, ni con 25 piezas del tipo C.

OMM 1993

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $\angle A = 90^o$. Sea E un punto tal que AEC es exterior a ABC, $AE = CE$ y $\angle AEC = 90^o$. Análogamente, tomamos D de manera que ADB es exterior a ABC y semejante a AEC. O es el punto medio de BC. Las rectas OD y EC se intersectan en D', y las rectas OE y BD se intersectan E'. Encuentra el área $DED'E'$ en términos de los lados de ABC.

Problema 2. Encuentre todos los enteros positivos entre 100 y 999 tales que son iguales a la suma de los cubos de sus dígitos.

Problema 3. Dado un pentágono de área 1993 y 995 puntos dentro del pentágono, sea S el conjunto que contiene los vértices del pentágono y los 995 punto. Muestra que existen tres puntos de S que formen un triángulo de área menor o igual a 1.

Problema 4. La función $f(n,k)$ se define de la siguiente manera:

(1) $f(n,0) = f(n,n) = 1$ y

(2) $f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k)$ para $0 < k < n$.

¿Cuántas veces tenemos que usar (2) para encontrar $f(3991, 1993)$?

Problema 5. OA, OB, OC son tres cuerdas de una circunferencia. Las circunferencias con diámetros OA, OB se intersectan por segunda vez en Z, las circunferencias de diámetros OB, OC se intersectan por segunda vez en X, y las circunferencias de diámetros OC, OA se intersectan por segunda vez Y. Muestra que los puntos X, Y, Z son colineales.

Problema 6. Sea p un primo impar. Muestra que p divide a $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ para algún número entero n si y solo si p divide a $m^2 - 5$ para algún número entero m.

OMM 1992

Problema 1. El tetraedro $OPQR$ tiene el $\angle POQ = \angle POR = \angle QOR = 90^o$. X, Y, Z son los puntos medios de PQ, QR y RP. Demuestre que las cuatro caras del tetraedro $OXYZ$ tienen la misma área.

Problema 2. Dado un número primo p, ¿cuántas tuplas (a, b, c, d) de números enteros positivos con $0 \leq a, b, c, d \leq p-1$ satisfacen $ad = bc \pmod{p}$?

Problema 3. Dados 7 puntos dentro o sobre un hexágono regular, demuestra que tres de ellos forman un triángulo con área $\leq \frac{1}{6}$ el área del hexágono.

Problema 4. Demuestre que $1 + 11^{11} + 111^{111} + 1111^{1111} + ... + 11111111^{111111}$ es divisible por 100.

Problema 5. x, y, z son reales positivos con suma 3. Demuestra que

$$6 < \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3} \leq 3\sqrt{5}$$

Problema 6. $ABCD$ es un rectángulo. I es el punto medio de CD. BI se encuentra con AC en M. Demostrar que la recta DM pasa por el punto medio de BC. E es un punto fuera del rectángulo tal que $AE = BE$ y $\angle AEB = 90^o$. Si $BE = BC = x$, demostrar que EM biseca a $\angle AMB$. Hallar el área de $AEBM$ en términos de x.

OMM 1991

Problema 1. Evaluar la suma de todas las fracciones irreducibles positivas menores que 1 y que tengan el denominador 1991.

Problema 2. Una compañía de n soldados es tal que n es un número palíndromo (se lee igual en ambas direcciones). Si los soldados se disponen en filas de 3, 4 o 5 soldados, entonces la última fila contiene 2, 3 y 5 soldados, respectivamente. Encontrar el menor n que satisfaga estas condiciones y demostrar que hay infinitos números n.

Problema 3. Se colocan cuatro esferas de radio 1 en el espacio de forma que cada una de ellas toca a las otras tres. ¿Cuál es el radio de la esfera más pequeña que las contiene a todas?

Problema 4. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$ son perpendiculares. Sean M, N, R, S los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente, y sean W, X, Y, Z las proyecciones de los puntos M, N, R y S sobre las rectas CD, DA, AB y BC, respectivamente. Demostrar que los puntos M, N, R, S, W, X, Y y Z se encuentran en una misma circunferencia.

Problema 5. La suma de cuadrados de dos enteros consecutivos puede ser un cuadrado, como en $3^2 + 4^2 = 5^2$. Demostrar que la suma de cuadrados de m enteros consecutivos no puede ser un cuadrado para $m = 3$ o 6 y encontrar un ejemplo de 11 enteros consecutivos cuya suma de cuadrados sea un cuadrado.

Problema 6. Dado un polígono de n lados ($n \geq 4$), considere un conjunto T de triángulos formados por vértices del polígono que con la siguiente propiedad: Cualesquiera dos triángulos en T tienen o bien dos vértices comunes, o bien ninguno. Demostrar que T contiene a lo más n triángulos.

OMM 1990

Problema 1. ¿Cuántos caminos hay desde$A$ hasta la recta BC si el camino no pasa dos veces por ningún vértice y se mueve siempre hacia la izquierda?

Problema 2. ABC es un triángulo con $\angle B = 90^o$ y altura BH. Los inradios de ABC, ABH, CBH son r, r_1, r_2. Encuentra una relación entre ellos.

Problema 3. Demuestre que $n^{n-1} - 1$ es divisible por $(n-1)^2$ para todo $n > 2$.

Problema 4. Considera las 27 fichas de dominó que quedan quitando la blanca-blanca. Tomando en cuenta los puntos que hay en una ficha, a cada ficha le corresponde un número racional menor o igual que uno. ¿Cuál es la suma de todos estos números?

Problema 5. Dados 19 puntos en el plano con coordenadas enteras, donde no hay tres colineales. Demuestre que siempre podemos encontrar tres de esos puntos cuyo centroide tiene coordenadas enteras.

Problema 6. ABC es un triángulo con $\angle C = 90^o$. E es un punto de AC, y F es el punto medio de EC. CH es una altura. I es el circuncentro de AHE, y G es el punto medio de BC. Demuestra que ABC y IGF son similares.

OMM 1989

Problema 1. En un triángulo ABC el área es 18, la longitud AB es 5, y las medianas de A y B son ortogonales. Hallar las longitudes de los lados BC, AC.

Problema 2. Encontrar dos enteros positivos a, b tales que $a|b^2, b^2|a^3, a^3|b^4, b^4|a^5$, pero a^5 no divide a b^6.

Problema 3. Demostrar que no hay ningún número natural de 1989 cifras que tenga al menos tres dígitos iguales a 5 y que el producto de sus dígitos sea igual a su suma.

Problema 4. Encontrar el menor número natural posible $n = \overline{a_m...a_2a_1a_0}$ (en sistema decimal) tal que el número $r = \overline{a_1a_0a_ma_{m-1}...a_20}$ sea igual a $2n$.

Problema 5. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias unitarias tangentes a una circunferencia C de radio 2. La circunferencia C_3 dentro de C es tangente a las circunferencias C, C_1, C_2, y la circunferencia C_4 dentro de C es tangente a C, C_1, C_3. Demostrar que los centros de C_1, C_2, C_3 y C_4 son vértices de un rectángulo.

Problema 6. Determina el número de caminos desde A a B en la imagen que van sólo por las líneas de la cuadrícula, no pasan por ningún punto punto dos veces, y nunca van hacia arriba?

OMM 1988

Problema 1. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar siete canicas blancas y cinco negras en una línea de tal manera que no haya dos canicas negras vecinas?

Problema 2. Si a y b son enteros positivos, demostrar que $11a + 2b$ es múltiplo de 19 si y sólo si lo es $18a + 5b$.

Problema 3. Se dan dos circunferencias externamente tangentes con radios diferentes. Sus tangentes comunes forman un triángulo. Halla el área de este triángulo en función de los radios de las dos circunferencias.

Problema 4. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar ocho enteros $a_1, a_2, ..., a_8$, no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_1 \leq ... \leq a_8 \leq 8$?

Problema 5. Si a y b son enteros positivos coprimos y n un entero, demostrar que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a $n + 2$.

Problema 6. Considera dos puntos fijos B, C en una circunferencia w. Encuentra el locus de los incentros de todos los triángulos ABC cuando el punto A se mueve sobre w.

Problema 7. Dos subconjuntos disjuntos del conjunto $\{1, 2, ..., m\}$ tienen la misma suma de elementos. Demostrar que cada uno de los subconjuntos A, B tiene menos de $m\sqrt{2}$ elementos.

Problema 8. Calcula el volumen de un octaedro regular circunscrito a una esfera de radio 1.

OMM 1987

Problema 1. Demuestra que si la suma de dos fracciones irreducibles es un número entero entonces las dos fracciones tienen el mismo denominador.

Problema 2. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 20!?

Problema 3. Consideremos dos rectas ℓ y ℓ' y un punto fijo P equidistante de estas rectas. Cuál es el lugar geométrico de las proyecciones M de P sobre AB, donde A está en ℓ, B en ℓ', y el ángulo $\angle APB$ es recto?

Problema 4. Calcular el producto de todos los enteros positivos menores que 100 y que tengan exactamente tres divisores positivos. Demuestra que este producto es un cuadrado.

Problema 5. En un triángulo rectángulo ABC, M es un punto de la hipotenusa BC y P y Q las proyecciones de M sobre AB y AC respectivamente. Demostrar que para ningún punto M los triángulos BPM, MQC y el rectángulo $AQMP$ tienen la misma área.

Problema 6. Demostrar que para todo entero positivo n el número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es un múltiplo de 3804.

Problema 7. Demuestre que la fracción $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es irreducible para todo entero positivo n.

Problema 8. Tres rectas l, m, n en el espacio pasan por el punto S. Un plano perpendicular a m interseca l, m, n en A, B, C respectivamente. Supongamos que $\angle ASB = \angle BSC = 45^o$ y $\angle ABC = 90^o$. Calcula $\angle ASC$. Además, si un plano perpendicular a l corta l, m, n en P, Q, R respectivamente y $SP = 1$, hallar los lados del triángulo PQR.

II. Problemas OMCC

Problemas Resueltos

OMCC	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2021						
2020						
2019						
2018						
2017						
2016						
2015						
2014						
2013						
2012						
2011						
2010						
2009						
2008						
2007						
2006						
2005						
2004						
2003						
2002						
2001						
2000						
1999						

OMCC 2021

Problema 1. Una terna ordenada (p, q, r) de números primos se llama parcera si p divide $q^2 - 4$, q divide $r^2 - 4$ y r divide $p^2 - 4$. Encuentra todos las ternas parceras.

Problema 2. Sea ABC un triángulo y sea Γ su circuncírculo. Sea D un punto en AB tal que CD es paralelo a la recta tangente a Γ en A. Sea E la intersección de CD con Γ distinta de C, y F la intersección de BC con el circuncírculo de $\triangle ADC$ distinta de C. Por último, sea G la intersección de la recta AB con la bisectriz interna del $\angle DCF$.Demostrar que E, G, F y C se encuentran en la misma circunferencia.

Problema 3. En una mesa formada por 2021×2021 cuadrados unitarios, algunos cuadrados están coloreados de negro de tal manera que si colocamos un ratón en el centro de cualquier cuadrado de la mesa, éste puede caminar en línea recta (hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda o hacia la derecha a lo largo de una columna o fila) y salir de la mesa sin pisar ningún cuadrado negro (aparte del inicial si es negro). ¿Cuál es el número máximo de casillas que pueden ser de color negro?

Problema 4. Hay 2021 personas en una reunión. Se sabe que una persona de la reunión no tiene ningún amigo allí y que otra persona sólo tiene un amigo allí. Además, es cierto que, dadas cualesquiera 4 personas, al menos 2 de ellas son amigos. Demuestra que hay 2018 personas en la reunión que son todas amigas entre sí. *Nota.* Si A es amigo de B entonces B es amigo de A.

Problema 5. Sea $n \geq 3$ un número entero y $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales positivos tales que m es el menor y M el mayor de estos números. Se sabe que para cualesquiera enteros distintos $1 \leq i, j, k \leq n$, si $a_i \leq a_j \leq a_k$ entonces $a_i a_k \leq a_j^2$. Demostrar que

$$a_1 a_2 \cdots a_n \geq m^2 M^{n-2}$$

y determinar cuando la igualdad se mantiene.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea M el punto medio de AC. Se elige un punto P (distinto de B) en el segmento BC de forma que $AB = AP$. Sea D la intersección de AC con el circuncírculo del $\triangle ABP$ distinto de A, y E la intersección de PM con el circuncírculo del $\triangle ABP$ distinto de P. Sea K la intersección de las rectas AP y DE. Sea F un punto sobre BC (distinto de P) tal que $KP = KF$.Demostrar que C, D, E y F están en la misma circunferencia.

OMCC 2020

Problema 1. Un número entero positivo de cuatro dígitos se llama virtual si tiene la forma $\overline{abab}$, donde a y b son dígitos y $a \neq 0$. Por ejemplo, 2020, 2121 y 2222 son números virtuales, mientras que 2002 y 0202 no lo son. Encontrar todos los números virtuales de la forma $n^2 + 1$, para algún número entero positivo n.

Problema 2. Supongamos que tienes monedas idénticas distribuidas en varios montones con una o más monedas en cada uno de ellos. Una acción consiste en tomar dos montones, que tienen un total par de monedas entre ellos, y redistribuir sus monedas en dos montones para que terminen con el mismo número de monedas. Una distribución es *nivelable* si es posible, mediante 0 o más operaciones, acabar con todos los montones con el mismo número de monedas. Determinar todos los enteros positivos n tales que, para todos los enteros positivos k, cualquier distribución de nk monedas en n montones es nivelable.

Problema 3. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ que satisfacen la siguiente propiedad: si a, b y c son enteros tales que $a + b + c = 0$, entonces

$$f(a) + f(b) + f(c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Problema 4. Considera un triángulo ABC con $BC > AC$. La circunferencia con centro C y radio AC interseca al segmento BC en D. Sea I el incentro del triángulo ABC y Γ la circunferencia que pasa por I y es tangente a la recta CA en A. La recta AB y Γ se cruzan en un punto F con $F \neq A$. Demostrar que $BF = BD$.

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un número entero positivo y $x_1, x_2, \ldots, x_k$ números reales positivos tales que $x_1 x_2 \cdots x_k = 1$. Demuestre que

$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) \geq kP(1).$$

Problema 6. Un entero positivo N es ïnteroceánico"si su factorización prima

$$N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

satisface

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

Encuentra todos los números interoceánicos menores que 2020.

OMCC 2019

Problema 1. Sea $N = \overline{abcd}$ un número entero positivo de cuatro cifras. Nombramos *potencia plátano* al menor entero positivo $p(N) = \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ que se puede intercalar entre los números $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ de tal manera que el nuevo número $\overline{ab\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k cd}$ sea divisible por N. Determinar el valor de $p(2025)$.

Problema 2. Tenemos un polígono regular P con 2019 vértices, y en cada vértice hay una moneda. Dos jugadores Azul y Rojo se turnan alternativamente, empezando por Azul, de la siguiente manera: primero, Azul elige un triángulo con vértices en P y colorea su interior de azul, luego Rojo elige un triángulo con vértices en P y colorea su interior de rojo, de manera que los triángulos formados en cada jugada no se cruzan internamente con los triángulos coloreados anteriores. Continúan jugando hasta que no sea posible elegir otro triángulo para colorear. Entonces, un jugador gana la moneda de un vértice si coloreó la mayor cantidad de triángulos incidentes en ese vértice (si las cantidades de triángulos coloreados con azul o rojo incidentes en el vértice son iguales, entonces nadie gana esa moneda y la moneda se borra). El jugador con la mayor cantidad de monedas gana la partida. Encuentra una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

Nota. Dos triángulos pueden compartir vértices o lados.

Problema 3. Sea ABC un triángulo y Γ su circumcírculo. Sea D el pie de la altura desde A al lado BC, M y N los puntos medios de AB y AC, y Q el punto de Γ diametralmente opuesto a A. Sea E el punto medio de DQ. Demostrar que las rectas perpendiculares a EM y EN que pasan por M y N respectivamente, se encuentran en AD.

Problema 4. Sea ABC un triángulo, Γ su circuncírculo y l la tangente a Γ por A. Las alturas de B y C se prolongan y se encuentran con l en D y E, respectivamente. Las rectas DC y EB vuelven a encontrarse con Γ en P y Q, respectivamente. Demostrar que el triángulo APQ es isósceles.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos de tales que $a+b+c=1$. Demostrar que

$$a\sqrt{a^2+6bc}+b\sqrt{b^2+6ac}+c\sqrt{c^2+6ab} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Problema 6. Un *triminó* es una ficha rectangular de 1×3. ¿Es posible cubrir un tablero de ajedrez de 8×8 utilizando 21 triminós, de tal manera que quede exactamente una casilla de 1×1 sin cubrir? En caso de que la respuesta sea afirmativa, determine todas las posibles ubicaciones de dicha casilla unitaria en el tablero de ajedrez.

OMCC 2018

Problema 1. Hay 2018 cartas numeradas del 1 al 2018. Los números de las cartas están visibles en todo momento. Tito y Pepe juegan a un juego. Empezando por Tito, se van turnando para agarrar las cartas hasta que terminan. Entonces cada jugador suma los números de sus cartas y gana quien tenga una suma par. Determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbela.

Problema 2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo inscrito en la circunferencia ω de centro O. Sea T la reflexión de C respecto a O y T' la reflexión de T respecto a la recta AB. La recta BT' interseca de nuevo a ω en R. La perpendicular a CT que pasa por O corta a la recta AC en L. Sea N la intersección de las rectas TR y AC. Demostrar que $\overline{CN} = 2\overline{AL}$.

Problema 3. Sean x, y números reales tales que $x - y, x^2 - y^2, x^3 - y^3$ son todos números primos. Demostrar que $x - y = 3$.

Problema 4. Determinar todas las tripletas (p, q, r) de enteros positivos, donde p, q son números primos, tales que $\frac{r^2-5q^2}{p^2-1} = 2$.

Problema 5. Sea n un número entero positivo, $1 < n < 2018$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ definimos el polinomio $S_i(x) = x^2 - 2018x + l_i$, donde $l_1, l_2, \ldots, l_n$ son enteros positivos distintos. Si el polinomio $S_1(x) + S_2(x) + \cdots + S_n(x)$ tiene al menos una raíz entera, demostrar que al menos uno de los l_i es mayor o igual que 2018.

Problema 6. En La Habana se realiza un baile con 2018 parejas. Para el baile, se dispone de una circunferencia donde inicialmente se marcan 2018 puntos distintos, etiquetados con los números $0, 1, \ldots, 2017$. Las parejas son ubicadas sobre los puntos marcados, una en cada punto. Para $i \geq 1$, se define s_i como el residuo de dividir i entre 2018 y r_i como el residuo de dividir $2i$ entre 2018. El baile comienza en el minuto 0. En el $i-$ésimo minuto después de haber inciado el baile, la pareja ubicada en el punto s_i (si la hay) se mueve al punto r_i, la pareja que ocupaba el punto r_i (si la hay) se retira, y el baile continúa con las parejas restantes. El baile termina después de 2018^2 minutos. Determine cuantas parejas quedarán al terminar el baile.

OMCC 2017

Problema 1. La figura siguiente muestra una red hexagonal formada por muchos triángulos equiláteros congruentes. Por turnos, Gabriel y Arnaldo juegan de la siguiente manera. En su turno, el jugador colorea un segmento, incluyendo los puntos extremos, siguiendo estas tres reglas: Los puntos finales deben coincidir con los vértices de los triángulos equiláteros marcados. El segmento debe estar formado por uno o varios de los lados de los triángulos. El segmento no puede contener ningún punto (puntos finales incluidos) de un segmento previamente coloreado.

Gabriel juega primero, y el jugador que no puede hacer un movimiento legal pierde. Encuentra una estrategia ganadora y descríbela.

Problema 2. Llamamos a un par (a, b) de enteros positivos, $a < 391$, "pupusa"si

$$\text{lcm}(a, b) > \text{lcm}(a, 391)$$

Encuentra el valor mínimo posible de b, entre todas las parejas "pupusa".

Problema 3. Sea ABC un triángulo y D el pie de la altura desde A. Sea l la recta que pasa por los puntos medios de BC y AC. E es la reflexión de D sobre l. Demostrar que el circuncentro del $\triangle ABC$ está en la recta AE.

Problema 4. ABC es un triángulo rectángulo, con $\angle ABC = 90°$. B' es la reflexión de B sobre AC. M es el punto medio de AC. Elegimos D sobre $\overline{BM}$, tal que $BD = AC$. Demostrar que $B'C$ es la bisectriz de $\angle BM'D$. NOTA: Una condición importante que no se menciona en el problema original es $AB < BC$. En caso contrario, $\angle MB'D$ no está definido o en otras palabras, $B'C$ es la bisectriz externa.

Problema 5. Susana y Brenda juegan a escribir polinomios en la pizarra. Susana empieza y juegan por turnos. En el turno preparatorio (turno 0), Susana elige un entero positivo n_0 y escribe el polinomio $P_0(x) = n_0$. En el turno 1, Brenda elige un entero positivo n_1, distinto de n_0, y escribe el polinomio

$$P_1(x) = n_1x + P_0(x) \text{ o } P_1(x) = n_1x - P_0(x).$$

En general, en el turno k, el jugador respectivo elige un número entero n_k, diferente de $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$, y escribe el polinomio

$$P_k(x) = n_kx^k + P_{k-1}(x) \text{ o } P_k(x) = n_kx^k - P_{k-1}(x).$$

El primer jugador que escriba un polinomio con al menos una raíz entera gana. Encuentra y describe una estrategia ganadora.

Problema 6. La rana Tita se sienta en la recta numérica. Inicialmente está en el número entero $k > 1$. Si está sentada en el número n, salta al número $f(n) + g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son, respectivamente, los números primos positivos más grandes y más pequeños que dividen a n. Encuentre todos los valores de k de manera que Tita pueda saltar a infinitos números enteros distintos.

OMCC 2016

Problema 1. Encontrar todos los enteros positivos n que tienen 4 dígitos, todos ellos cuadrados perfectos, y tales que n es divisible por 2, 3, 5 y 7.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo, Γ su circunferencia y M el punto medio de BC. Sea N un punto del arco BC de Γ que no contenga a A tal que $\angle NAC = \angle BAM$. Sea R el punto medio de AM, S el punto medio de AN y T el pie de la altitud que pasa por A. Demostrar que R, S y T son colineales.

Problema 3. El polinomio $Q(x) = x^3 - 21x + 35$ tiene tres raíces reales diferentes. Encontrar números reales a y b tales que el polinomio $x^2 + ax + b$ permute cíclicamente las raíces de Q, es decir, si r, s y t son las raíces de Q (en algún orden) entonces $P(r) = s$, $P(s) = t$ y $P(t) = r$.

Problema 4. El número 3 está escrito en un tablero. Ana y Bernardo juegan por turnos, empezando por Ana, al siguiente juego. Si el número escrito en el tablero es n, el jugador en su turno debe sustituirlo por un número entero m coprimo de n y tal que $n < m < n^2$. El primer jugador que alcance un número mayor o igual que 2016 pierde. Determinar cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y describirla.

Problema 5. Decimos que un número es irie si se puede escribir de la forma $1 + \frac{1}{k}$ para algún entero positivo k. Demostrar que todo número entero $n \geq 2$ puede escribirse como el producto de r números irie distintos para todo número entero $r \geq n - 1$.

Problema 6. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I y circuncírculo Γ. Sean $M = BI \cap \Gamma$ y $N = CI \cap \Gamma$, la recta paralela a MN por I corta a AB, AC en P y Q. Demostrar que el circunradio de $\odot(BNP)$ y $\odot(CMQ)$ son iguales.

OMCC 2015

Problema 1. Queremos escribir n números reales distintos ($n \geq 3$) en la circunferencia de un círculo de forma que cada número sea igual al producto de sus vecinos inmediatos a la izquierda y a la derecha. Determinar todos los valores de n para los que esto es posible.

Problema 2. Una sucesión (a_n) de números reales está definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 2015$ y para todo $n \geq 1$, tenemos:

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Calcule el valor de

$$\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \ldots + \frac{a_{2013}}{a_{2014}} - \frac{a_{2014}}{a_{2015}}.$$

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB < CD$, y sea P el punto de intersección de las rectas AD y BC.La circunferencia del triángulo PCD corta a la recta AB en los puntos Q y R. Sean S y T los puntos en los que las tangentes de P a la circunferencia de $ABCD$ tocan dicha circunferencia. Muestra que $PQ = PR$. Muestra que $QRST$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 4. Anselmo y Bonifacio inician un juego en el que sustituyen alternativamente un número escrito en un tablero. En cada turno, un jugador puede sustituir el número escrito por el número de divisores del número escrito o por la diferencia entre el número escrito y el número de divisores que tiene. Anselmo es el primer jugador en jugar, y el que sea el primero en escribir el número 0 es el ganador. Dado que el número inicial es 1036, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y describe dicha estrategia. Nota: Por ejemplo, el número de divisores de 14 es 4, ya que sus divisores son 1, 2, 7 y 14.

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $AC = 2AB$. Sea D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo CAB con BC. Sea F el punto de intersección de la recta paralela a AB que pasa por C con la recta perpendicular a AD que pasa por A. Demostrar que FD pasa por el punto medio de AC.

Problema 6. 39 estudiantes participaron en un concurso de matemáticas. El examen constaba de 6 problemas y cada problema valía 1 punto por una solución correcta y 0 puntos por una solución incorrecta. Para 3 estudiantes cualesquiera, hay a lo más 1 problema que no fue resuelto por ninguno de los tres. Sea B la suma de todas las puntuaciones de los 39 estudiantes. Hallar el menor valor posible de B.

OMCC 2014

Problema 1. Un número entero positivo se llama "tico"si es el producto de tres números primos diferentes que suman 74. Comprueba que 2014 es tico. ¿Qué año será el próximo año tico? ¿Cuál será el último año tico de la historia?

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio con bases AB y CD, inscrito en una circunferencia de centro O. Sea P la intersección de las rectas BC y AD. Una circunferencia que pasa por O y P interseca los segmentos BC y AD en los puntos interiores F y G, respectivamente. Demostrar que $BF = DG$.

Problema 3. Sean a, b, c y d números reales tales que no hay dos iguales,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$$

y $ac = bd$. Hallar el máximo valor posible de

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}.$$

Problema 4. Utilizando cuadrados de lado 1, se forma una figura en forma de escalera por etapas siguiendo el patrón del dibujo. Por ejemplo, la primera etapa utiliza 1 cuadrado, la segunda utiliza 5, etc. Determina la última etapa para la que la figura correspondiente utiliza menos de 2014 cuadrados.

Problema 5. Se eligen los puntos A, B, C y D sobre una recta en ese orden, con AB y CD mayores que BC. Se construyen los triángulos equiláteros APB, BCQ y CDR de forma que P, Q y R estén en el mismo lado respecto a AD. Si $\angle PQR = 120°$, demuestre que

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{BC}.$$

Problema 6. Un entero positivo n es "divertido"si para todos los divisores positivos d de n, $d+2$ es un número primo. Encuentra todos los números divertidos con el mayor número posible de divisores.

OMCC 2013

Problema 1. Juan escribe la lista de parejas $(n, 3^n)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ en un pizarrón. A medida que va escribiendo la lista, subraya las parejas $(n, 3^n)$ cuando n y 3^n tienen la misma cifra de las unidades. De las parejas subrayadas, cuál ocupa la posición 2013?

Problema 2. Alrededor de una mesa redonda están sentadas en sentido horario las personas $P_1, P_2, \ldots, P_{2013}$. Cada una tiene cierta cantidad de monedas (posiblemente ninguna); entre todas tienen 10000 monedas. Comenzando por P_1 y prosiguiendo en sentido horario, cada persona en su turno hace lo siguiente: Si tiene un número par de monedas, se las entrega todas a su vecino de la izquierda. Si en cambio tiene un número impar de monedas, le entrega a su vecino de la izquierda un número impar de monedas (al menos una y como máximo todas las que tiene), y conserva el resto. Pruebe que, repitiendo este procedimiento, necesariamente llegará un momento en que todas las monedas estén en poder de una misma persona.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadirlátero convexo y M el punto medio del lado AB. La circunferencia que pasa por D y es tangente a AB en A corta al segmento DM en E. La circunferencia que pasa por C y es tangente a AB en B corta al segmento CM en F. Suponga que las rectas AF y BE se cortan en un punto que pertenece a la mediatriz del lado AB. Demuestre que A, E y C son colineales si y solo si B, F y D son colineales.

Problema 4. Ana y Beatriz alternan turnos en un juego que se inicia con un cuadrado de lado 1 dibujado en un tablero infinito. Cada jugada consiste en dibujar un cuadrado que no se superponga con la figura ya dibujada, de manera que uno de sus lados sea un lado (completo) del rectángulo que está dibujado. Gana el juego aquella persona que logre completar una figura cuya área sea múltiplo de 5. Si Ana realiza la primera jugada, ¿existe estrategia ganadora para alguna jugadora?

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea Γ su circuncírculo. La bisectriz del ángulo A interseca a BC en D, a Γ en K (distinto de A), y a la tangente a Γ por B en X. Demuestre que K es el punto medio de AX si y solo si $\frac{AD}{DC} = \sqrt{2}$.

Problema 6. Determine todas las parejas de polinomios no constantes $p(x)$ y $q(x)$, cada uno con coeficiente principal 1, grado n y n raíces enteras no negativas, tales que $p(x) - q(x) = 1$.

OMCC 2012

Problema 1. Encuentra todos los números enteros positivos que son iguales a 700 veces la suma de sus dígitos.

Problema 2. Sea γ la circunferencia del triángulo agudo ABC. Sea P el punto medio del arco menor BC. La paralela a AB que pasa por P corta a BC, AC y γ en los puntos R, S y T, respectivamente. Sean $K \equiv AP \cap BT$ y $L \equiv BS \cap AR$. Demostrar que KL pasa por el punto medio de AB si y sólo si $CS = PR$.

Problema 3. Sean a, b, c números reales que satisfacen $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 1$ y $ab+bc+ac > 0$.

Demuestre que

$$a+b+c-\frac{abc}{ab+bc+ac} \geq 4.$$

Problema 4. Trilandia es una ciudad muy singular. La ciudad tiene la forma de un triángulo equilátero de lado 2012. Las calles dividen la ciudad en varias manzanas con forma de triángulo equilátero de lado 1. También hay calles en la frontera de Trilandia. Hay 6036 calles en total. El alcalde quiere poner puestos de vigilancia en algunas intersecciones de la ciudad para controlar las calles. Un punto de control puede vigilar todas las calles en las que se encuentra. ¿Cuál es el menor número de puntos de control necesarios para vigilar todas las calles de Trilandia?

Problema 5. Alex y luisa son una pareja de ladrones. Todas las mañanas, Luisa roba un tercio del dinero de Alex, pero por la tarde siente remordimientos y le da la mitad de todo el dinero que tiene. Si Luisa no tiene dinero al principio y empieza a robar el primer día, ¿cuál es la menor cantidad entera positiva de dinero que debe tener Alex para que al final del día 2012 ambos tengan una cantidad entera de dinero?

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $AB < BC$, y sean E y F puntos en AC y AB tales que $BF = BC = CE$, ambos en el mismo semiplano que A respecto a BC.

Sea G la intersección de BE y CF. Sea H un punto de la paralela que pasa por G a AC tal que $HG = AF$ (con H y C en semiplanos opuestos respecto a BG). Demostrar que $\angle EHG = \frac{\angle BAC}{2}$.

OMCC 2011

Problema 1. Considere un cubo con una mosca en cada uno de sus vértices. Cuando suena un silbato, cada mosca se desplaza a un vértice de la misma cara que el anterior pero diagonalmente opuesto a él. Después de que suene el silbato, ¿de cuántas maneras pueden cambiar de posición las moscas para que no haya ningún vértice con 2 o más moscas?

Problema 2. En un triángulo escaleno ABC, D es el pie de la altitud que pasa por A, E es la intersección de AC con la bisectriz del $\angle ABC$ y F es un punto de AB. Sea O el circuncentro de ABC y $X = AD \cap BE$, $Y = BE \cap CF$, $Z = CF \cap AD$. Si XYZ es un triángulo equilátero, demostrar que uno de los triángulos OXY, OYZ, OZX debe ser equilátero.

Problema 3. Un "deslizamiento"sobre un entero $n \geq 2$ es una operación que consiste en elegir un divisor primo p de n y sustituir n por $\frac{n+p^2}{p}$. Partiendo de un entero arbitrario $n \geq 5$, aplicamos sucesivamente la operación de deslizamiento sobre él. Demostrar que eventualmente se llega a 5, sin importar los deslizamientos aplicados.

Problema 4. Encontrar todos los enteros positivos p, q, r tales que p y q son números primos y $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(p+1)(q+1)} = \frac{1}{r}$.

Problema 5.
Si x, y, z son números positivos que satisfacen

$$x + \frac{y}{z} = y + \frac{z}{x} = z + \frac{x}{y} = 2.$$

Encuentra todos los valores posibles de $x + y + z$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo agudo y D, E, F los pies de las alturas que pasan por A, B, C respectivamente. Llamemos Y y Z a los pies de las rectas perpendiculares desde B y C a FD y DE, respectivamente. Sea F_1 la reflexión de F respecto a E y E_1 la reflexión de E respecto a F. Si $3EF = FD + DE$, demostrar que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.

OMCC 2010

Problema 1. Denotemos por $S(n)$ la suma de los dígitos del entero positivo n. Encontrar todas las soluciones de la ecuación $n(S(n)-1)=2010$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo y L, M, N los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. La tangente a la circunferencia de ABC en A interseca a LM y LN en P y Q, respectivamente. Demostrar que CP es paralela a BQ.

Problema 3. Una ficha se coloca en una casilla de un tablero de $m \times n$, y se mueve según las siguientes reglas: En cada turno, la ficha puede moverse a una casilla que comparta un lado con la que está ocupada actualmente. La ficha no puede colocarse en una casilla ya ocupada. Dos movimientos consecutivos no pueden tener la misma dirección.

El juego termina cuando la ficha no puede ser movida. Determine los valores de m y n para los que, colocando la ficha en alguna casilla, todas las casillas del tablero habrán sido ocupadas al final de la partida.

Problema 4. Encuentre todos los números enteros positivos N tales que un tablero de $N \times N$ pueda ser embaldosado usando baldosas de tamaño 5×5 o 1×3.

Nota: Las baldosas deben cubrir completamente el tablero, sin superposiciones.

Problema 5. Si p, q y r son números racionales no nulos tales que $\sqrt[3]{pq^2}+\sqrt[3]{qr^2}+\sqrt[3]{rp^2}$ es un número racional no nulo, demuestre que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

Problema 6. Sean Γ y Γ_1 dos circunferencias internamente tangentes en A, con centros O y O_1 y radios r y r_1, respectivamente $(r > r_1)$. B es un punto diametralmente opuesto a A en Γ, y C es un punto en Γ tal que BC es tangente a Γ_1 en P. Sea A' el punto medio de BC. Dado que O_1A' es paralelo a AP, hallar la razón r/r_1.

OMCC 2009

Problema 1. Sea P el producto de todos los dígitos no nulos del entero positivo n. Por ejemplo, $P(4) = 4$, $P(50) = 5$, $P(123) = 6$, $P(2009) = 18$. Encuentra el valor de la suma: $P(1) + P(2) + ... + P(2008) + P(2009)$.

Problema 2. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cruzan en los puntos A y B. Consideremos una circunferencia Γ contenida en Γ_1 y Γ_2, que es tangente a ambas en D y E respectivamente. Sea C uno de los puntos de intersección de la recta AB con Γ, F la intersección de la recta EC con Γ_2 y G la intersección de la recta DC con Γ_1. Sean H e I los puntos de intersección de la recta ED con Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Demostrar que F, G, H e I están en la misma circunferencia.

Problema 3. Hay 2009 casillas numeradas del 1 al 2009, algunas de las cuales contienen piedras. Dos jugadores, A y B, juegan alternativamente, empezando por A. Una jugada consiste en seleccionar una casilla no vacía i, tomar una o varias piedras de esa casilla y colocarlas en la casilla $i + 1$. Si $i = 2009$, las piedras seleccionadas se eliminan. El jugador que elimina la última piedra gana. Si hay 2009 piedras en la caja 2 y las otras están vacías, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora. Si hay exactamente una piedra en cada casilla, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora.

Problema 4. Queremos colocar números naturales alrededor de un círculo de forma que los valores absolutos de las diferencias de cada par de números vecinos son todos diferentes. ¿Es posible colocar los números del 1 al 2009 satisfaciendo esta propiedad? ¿Es posible quitar uno de los números del 1 al 2009 de forma que los restantes números del 2008 puedan colocarse satisfaciendo la propiedad?

Problema 5. Dado un triángulo agudo y escaleno ABC, sea H su ortocentro, O su circuncentro, E y F los pies de las altitudes trazadas desde B y C, respectivamente. La recta AO vuelve a cortar la circunferencia del triángulo en el punto G y los segmentos FE y BC en los puntos X e Y respectivamente. Sea Z el punto de intersección de la recta AH y la recta tangente a la circunferencia en G. Demostrar que HX es paralela a YZ.

Problema 6. Encuentre todos los números primos p y q tales que $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

OMCC 2008

Problema 1. Encontrar el menor número entero positivo N tal que la suma de sus dígitos sea 100 y la suma de los dígitos de $2N$ sea 110.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia centrada en O tal que AC es un diámetro. Se construyen los pararrelogramas $DAOE$ y $BCOF$. Demostrar que si E y F están en la circunferencia entonces $ABCD$ es un rectángulo.

Problema 3. Hay bolsas de 2008 numeradas del 1 al 2008, con ranas de 2008 en cada una de ellas. Dos personas juegan por turnos. Una jugada consiste en seleccionar una bolsa y sacar de ella un número cualquiera de ranas (al menos una), dejando en ella x ranas ($x \geq 0$). Después de cada jugada, de cada bolsa con un número superior al seleccionado y que tenga más de x ranas, se escapan algunas ranas hasta que haya x ranas en la bolsa. Pierde el jugador que saque la última rana de la bolsa número 1. Encuentra y explica una estrategia ganadora.

Problema 4. Cinco chicas tienen una pequeña tienda que abre de lunes a viernes. Como dos personas son siempre suficientes para atenderla, deciden hacer un plan de trabajo para la semana, especificando quién trabajará cada día, y cumpliendo las siguientes condiciones: Cada chica trabajará exactamente dos días a la semana, y las 5 parejas asignadas para la semana deben ser diferentes ¿De cuántas maneras pueden las chicas hacer el plan de trabajo?

Problema 5. Encuentre un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tal que

$$(x+10)P(2x) = (8x-32)P(x+6)$$

para todo real x y $P(1) = 210$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo agudo. Tomemos los puntos P y Q dentro de AB y AC, respectivamente, tales que $BPQC$ es cíclico. La circunferencia de ABQ vuelve a intersecar BC en S y la circunferencia de APC vuelve a intersecar BC en R, PR y QS vuelven a intersecarse en L. Demostrar que la intersección de AL y BC no depende de la selección de P y Q.

OMCC 2007

Problema 1. La Olimpiada Centroamericana es una competición anual. La novena olimpiada se celebra en 2007. Hallar todos los enteros positivos n tales que n divide el número del año en que se celebra la n-ésima Olimpiada.

Problema 2. En un triángulo ABC, la bisectriz del ángulo A y las cevianas BD y CE coinciden en un punto P del interior del triángulo. Demostrar que el cuadrilátero $ADPE$ tiene un círculo interior si y sólo si $AB = AC$.

Problema 3. Sea S un conjunto finito de enteros. Supongamos que para cada dos elementos distintos de S, p y q, existen enteros no necesariamente distintos $a \neq 0$, b, c pertenecientes a S, tales que p y q son las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$. Determinar el número máximo de elementos que puede tener S.

Problema 4. En una isla remota se habla un idioma en el que cada palabra puede escribirse utilizando sólo las letras a, b, c, d, e, f, g. Digamos que dos palabras son "sinónimas"si podemos transformar una en la otra según las siguientes reglas: Cambiar una letra por otras dos de la siguiente manera:

$$a \to bc, b \to cd, c \to de, d \to ef, e \to fg, f \to ga, g \to ab.$$

Si una letra se encuentra entre otras dos letras iguales, éstas se pueden eliminar. Por ejemplo, $dfd \to f$.

Demuestra que todas las palabras de este lenguaje son sinónimas.

Problema 5. Dados dos enteros no negativos $m > n$, digamos que m *termina en* n si podemos obtener n borrando algunos dígitos (de izquierda a derecha) en la representación decimal de m. Por ejemplo, 329 termina en 29, y también en 9.

Determina cuántos números de tres cifras terminan en el producto de sus dígitos.

Problema 6. Consideremos una circunferencia S, y un punto P fuera de ella. Las líneas tangentes desde P se encuentran con S en A y B, respectivamente. Sea M el punto medio de AB. La mediatriz de AM se encuentra con S en un punto C que está dentro del triángulo ABP. AC corta a PM en G, y PM se encuentra con S en un punto D que está fuera del triángulo ABP. Si BD es paralela a AC, demostrar que G es el centroide del triángulo ABP.

OMCC 2006

Problema 1. Para $0 \leq d \leq 9$, definimos los números

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006}$$

Encontrar el último dígito del número

$$S_0 + S_1 + \cdots + S_9.$$

Problema 2. Sean Γ y Γ' dos circunferencias congruentes centradas en O y O', respectivamente, y sea A uno de sus dos puntos de intersección. B es un punto de Γ, C es el segundo punto de intersección de AB y Γ', y D es un punto de Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demostrar que la longitud de CD no depende de la posición de B.

Problema 3. Para todo número natural n definimos

$$f(n) = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Demuestre que para todo número entero $k \geq 1$ la ecuación

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.

Problema 4. El producto de varios enteros positivos distintos es divisible por 2006^2. Determina el valor mínimo que puede tomar la suma de dichos números.

Problema 5. El país *Olimpia* está formado por n islas. La más poblada se llama *Panacenter*, y cada isla tiene un número diferente de habitantes. Queremos construir puentes entre estas islas, con los que podremos viajar en ambas direcciones, bajo las siguientes condiciones: Ningún par de islas está unido por más de un puente. Utilizando los puentes podemos llegar a todas las islas desde el Panacentro. Si queremos viajar desde Panacenter a cada una de las otras islas, de forma que utilicemos cada puente como máximo una vez, el número de habitantes de las islas que visitamos es estrictamente decreciente.

Determina el número de formas en que podemos construir los puentes.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. $I = AC \cap BD$, y E, H, F y G son puntos en AB, BC, CD y DA respectivamente, tales que $EF \cap GH = I$. Si $M = EG \cap AC$, $N = HF \cap AC$, demuestre que

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}.$$

OMCC 2005

Problema 1. Entre los enteros positivos que se pueden expresar como la suma de 2005 enteros consecutivos, ¿cuál ocupa la posición 2005 cuando se ordenan?

Problema 2. Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - c^2 - a^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

Problema 3. Sea ABC un triángulo. Sean P, Q y R los puntos de contacto del incírculo con los lados AB, BC y CA, respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR desde R, P y Q, respectivamente. Muestra que que las rectas AN, BL y CM se encuentran en un punto. Muestra que este punto pertenece a la recta que une el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

Problema 4. Dos jugadores, Rojo y Azul, juegan por turnos en un tablero de 10×10. El azul va primero. En su turno, un jugador elige una fila o columna (no elegida aún por ningún jugador) y colorea todas sus casillas con su propio color. Si alguna de estas casillas ya estaba coloreada, el nuevo color sustituye al anterior.

El juego termina después de 20 turnos, cuando todas las filas y columnas han sido elegidas. El rojo gana si el número de casillas rojas en el tablero supera al menos en 10 el número de casillas azules; en caso contrario, gana el azul.

Determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y describe esta estrategia.

Problema 5. Sea ABC un triángulo, H el ortocentro y M el punto medio de AC. Sea ℓ la paralela que pasa por M a la bisectriz del $\angle AHC$. Demostrar que ℓ divide el triángulo en dos partes de igual perímetro.

Problema 6. Sea n un número entero positivo y p un primo fijo. Tenemos una baraja de n cartas, numeradas con $1,\ 2, \dots,\ n$ y p cajas para poner las cartas en ellas. Determinar todos los posibles enteros n para los que es posible distribuir las cartas en las cajas de forma que la suma de los números de las cartas en cada caja sea la misma.

OMCC 2004

Problema 1. En una pizarra, se escriben los números de 1 a 9. Los jugadores A y B se turnan, y A es el primero. Cada jugador, por turno, elige uno de los números de la pizarra y lo retira, junto con todos los múltiplos (si los hay). El jugador que elimina el último número pierde. Determina si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora.

Problema 2. Definimos la secuencia (a_n) como sigue: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$. Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 inclusive se pueden expresar como $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

Problema 3. ABC es un triángulo, y E y F son puntos de los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Supongamos que M es el punto medio de EF y G es el punto de intersección entre CM y AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

Problema 4. En un tablero de 10×10, la mitad de las casillas son de color blanco y la otra mitad de color negro. Un lado común a dos casillas del tablero es llamado "borde"si las dos casillas tienen colores diferentes. Determina el número mínimo y máximo posible de bordes que puede haber en el tablero.

Problema 5. Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea P el punto sobre AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$. Muestra que $\angle BPC = 90°$. Q es el punto medio de BC y R es el punto de intersección entre la recta AD y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Muestra que los puntos B, P, R y C son concíclicos.

Problema 6. Con perlas de diferentes colores formando collares, se dice que un collar es *primo* si no se puede descomponer en hilos de perlas de la misma longitud, e iguales entre sí. Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de los q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de los q colores posibles.

Nota: dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas y se puede conseguir el mismo color en ambos collares, girando uno de ellos para que coincida con el otro.

OMCC 2003

Problema 1. Dos jugadores A y B se turnan en el siguiente juego: Hay un montón de piedras de 2003. En su primer turno, A elige un divisor de 2003 y retira este número de piedras del montón. A continuación, B elige un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y así sucesivamente. El jugador que tenga que retirar la última piedra pierde. Demuestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describa la estrategia.

Problema 2. S es una circunferencia con AB de diámetro y t es la recta tangente a S en B. Consideremos los dos puntos C y D en t de tal manera que B está entre C y D. Supongamos que E y F son las intersecciones de S con AC y AD y que G y H son las intersecciones de S con CF y DE. Demostrar que $AH = AG$.

Problema 3. Sean a y b enteros positivos con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo hay desigualdad.

Problema 4. S_1 y S_2 son dos circunferencias que se cruzan en dos puntos diferentes P y Q. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas tales que ℓ_1 pasa por el punto P y corta S_1, S_2 en A_1, A_2 respectivamente (ambos distintos de P), y ℓ_2 pasa por el punto Q y corta S_1, S_2 en B_1, B_2 respectivamente (ambos distintos de Q). Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen el mismo perímetro.

Problema 5. Un tablero cuadrado con 8cm lados se divide en 64 casillas con cada lado 1cm. Cada casilla puede estar pintada de blanco o de negro. Halla el número total de formas de colorear el tablero para que cada cuadrado de lado 2cm formado por cuatro casillas con un vértice común contenga dos casillas blancas y dos negras.

Problema 6. Decimos que un número es "tico"si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 2003. Demuestra que existe un número entero positivo N tal que los primeros múltiplos de 2003, $N, 2N, 3N, \dots 2003N$ son todos ticos. ¿Existe un número entero positivo N tal que todos sus múltiplos son ticos?

OMCC 2002

Problema 1. ¿Para qué números enteros $n \geq 3$ es posible acomodar, en algún orden, los números $1, 2, \cdots, n$ en una forma circular tal que cada número divide la suma de los dos números siguientes, en sentido horario?

Problema 2. Sea ABC un triángulo agudo, y sean D y E los pies de las altitudes trazadas desde los vértices A y B, respectivamente. Demostrar que si,

$$[BDE] \leq [DEA] \leq [EAB] \leq [ABD]$$

entonces, el triángulo es isósceles.

Problema 3. Para cada número entero $a > 1$ se construye una lista infinita de enteros $L(a)$, como sigue: a es el primer número de la lista $L(a)$. Dado un número b en $L(a)$, el siguiente número de la lista es $b+c$, donde c es el mayor entero que divide a b y es menor que b. Encontrar todos los enteros $a > 1$ tales que 2002 está en la lista $L(a)$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo, D el punto medio de BC, E un punto del segmento AC tal que $BE = 2AD$ y F el punto de intersección de AD con BE. Si $\angle DAC = 60°$, hallar la medida del ángulo $\angle FEA$.

Problema 5. Encontrar un conjunto de infinitos enteros positivos S tal que para cada $n \geq 1$ y cualesquiera n elementos distintos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de S, el número $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ no es un cuadrado perfecto.

Problema 6. Una trayectoria desde $(0, 0)$ hasta (n, n) en la red está formada por movimientos unitarios hacia arriba o hacia la derecha. Está equilibrada si la suma de las coordenadas x de sus vértices $2n + 1$ es igual a la suma de sus coordenadas y. Demostrar que un camino equilibrado divide el cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(n, 0)$, (n, n), $(0, n)$ en dos partes con igual área.

OMCC 2001

Problema 1. Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de manera que A y B no están en posiciones consecutivas. A y B juegan en turnos alternos, empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas vecinas, la cual una vez tocada sale del círculo. El ganador es el último que queda en pie. Demuestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, y dé dicha estrategia. Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si es capaz de ganar sin importar lo que haga el adversario.

Problema 2. Sea AB el diámetro de una circunferencia con centro O y radio 1. Sean C y D dos puntos de la circunferencia tales que AC y BD se intersecan en un punto Q situado en el interior de la circunferencia, y $\angle AQB = 2\angle COD$. Sea P un punto que corta las tangentes a la circunferencia que pasan por los puntos C y D. Determinar la longitud del segmento OP.

Problema 3. Encuentra todos los números enteros positivos N tales que sólo dos de los dígitos de N son distintos de 0, uno de ellos es 3, y N es un cuadrado perfecto.

Problema 4. Determinar el menor número entero positivo n tal que existan enteros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, que sean menores o iguales a 15 y que no sean necesariamente distintos, tal que los cuatro últimos dígitos de la suma

$$a_1! + a_2! + \cdots + a_n!$$

es 2001.

Problema 5. Sean a, b y c números reales tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas p_1, p_2 y la ecuación $cx^2+bx+a = 0$ tiene dos soluciones reales distintas q_1, q_2. Sabemos que los números p_1, q_1, p_2, q_2 en ese orden, forman una progresión aritmética. Demostrar que $a + c = 0$.

Problema 6. En la circunferencia de un círculo se marcan 10000 puntos, que se numeran de 1 a 10000 en el sentido de las agujas del reloj. Se dibujan 5000 segmentos de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones: Cada segmento une dos puntos marcados. Cada punto marcado pertenece a uno y sólo un segmento. Cada segmento interseca exactamente uno de los segmentos restantes. A cada segmento se le asigna un número que es el producto del número asignado a cada punto final del segmento.

Sea S la suma de los productos asignados a todos los segmentos. Demostrar que S es múltiplo de 4.

OMCC 2000

Problema 1. Encontrar todos los números naturales de tres dígitos abc $(a \neq 0)$ tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

Problema 2. Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y n con piezas congruentes a las que se muestran a continuación.

Notas: Las piezas no deben superponerse ni dejar huecos. Los cuadritos de las piezas son de lado 1.

Problema 3. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo. Sean P, Q, R, S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE, respectivamente. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo y que su área es igual a $2/9$ el área del cuadrilátero $ABCD$.

Problema 4. En la figura, escribir un entero positivo dentro de cada triangulito, de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos. Dos triangulitos son vecinos si comparten un lado.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo, C_1 y C_2 dos circunferencias que tienen a los lados AB y CA como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado AB en el punto F y C_1 corta al lado CA en el punto E. Además, $\overline{BE}$ corta a C_2 en P y $\overline{CF}$ corta a C_1 en Q. Demostrar que $AP = AQ$.

Problema 6. Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de n. Escriba las 5 representaciones buenas de 10 y determine que enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas.

OMCC 1999

Problema 1. Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A llama a la persona B, A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?

Problema 2. Encontrar un entero positivo n de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número m que es divisor de n.

Problema 3. Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla '+'.

7	8	9	
4	5	6	+
1	2	3	

Dos jugadores A y B juegan de la manera siguiente: A enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla +. Pasa la calculadora a B, que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por A que no sea la misma que la última pulsada por A; a continuación pulsa + y le devuelve la calculadora a A, que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es esta?

Problema 4. En el trapecio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, sea M el punto medio del lado DA. Si $BC = a, MC = b$ y el ángulo MCB mide 150^o, hallar el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b.

Problema 5. Sea a un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demostrar que existen enteros positivos distintos b y c, tales que $a + b, a + c, b + c$ y $a + b + c$ son cuatro cuadrados perfectos.

Problema 6. Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S esté en S. Encuentre el número máximo de elementos de S.

III. Problemas EGMO

Problemas Resueltos

EGMO	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2022						
2021						
2020						
2019						
2018						
2017						
2016						
2015						
2014						
2013						
2012						

EGMO 2022

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $BC < AB$ y $BC < AC$. Considere los puntos P y Q en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $P \neq B$, $Q \neq C$ y $BQ = BC = CP$. Sea T el circuncentro del triángulo APQ, H el ortocentro del triángulo ABC y S el punto de intersección de las rectas BQ y CP. Pruebe que los puntos T, H y S están en una misma recta.

Problema 2. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualquier pareja de enteros positivos a y b, se cumplen las siguientes dos condiciones:

- $f(ab) = f(a)f(b)$, y
- al menos dos de los números $f(a)$, $f(b)$ y $f(a + b)$ son iguales.

Problema 3. Se dice que una sucesión infinita de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots$ es húngara si

- a_1 es un cuadrado perfecto, y
- para todo entero $n \geq 2$, a_n es el menor entero positivo tal que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

  es un cuadrado perfecto.

Pruebe que si $a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión húngara, entonces existe un entero positivo k tal que $a_n = a_k$ para todo entero $n \geq k$.

Problema 4. Para cada entero positivo $n \geq 2$, determine el mayor entero positivo N con la propiedad de que existen $N + 1$ números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que

- $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, y
- $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para todo $1 \leq k \leq N - 1$.

Problema 5. Dados n y k enteros positivos, sea $f(n, 2k)$ el número de formas en que un tablero de tamaño $n \times 2k$ puede ser completamente cubierto por nk fichas de dominó de tamaño 2×1 (por ejemplo, $f(2, 2) = 2$ y $f(3, 2) = 3$). Encuentre todos los enteros positivos n tales que para todo entero positivo k, el número $f(n, 2k)$ es impar.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncentro O. Sea X el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle ABC$; sea Y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$; sea Z el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle BCD$ y $\angle CDA$; y sea W el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle CDA$ y $\angle DAB$. Sea P el punto de intersección de las rectas AC y BD. Suponga que los puntos O, P, X, Y, Z y W son distintos.
Pruebe que O, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia si y sólo si P, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencias.

EGMO 2021

Problema 1. El número 2021 es fantabuloso. Si para algún entero positivo m, alguno de los elementos del conjunto $\{m, 2m+1, 3m\}$ es fantabuloso, entonces todos los elementos de dicho conjunto son fantabulosos. ¿Esto implica que el número 2021^{2021} es fantabuloso?

Problema 2. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que la ecuación

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

se cumple para todos los números racionales x y y. Nota: $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de todos los números racionales.

Problema 3. Sea ABC un triángulo con ángulo obtuso en A. Sean E y F las intersecciones de la bisectriz exterior del ángulo $\angle BAC$ con las alturas del triángulo ABC desde B y C, respectivamente. Sean M y N puntos en los segmentos EC y FB, respectivamente, tales que $\angle EMA = \angle BCA$ y $\angle ANF = \angle ABC$. Demuestre que los puntos E, F , M y N están sobre una misma circunferencia.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC. La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en el punto E. La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en el punto F. Demuestre que la reflexión de A sobre la recta EF está en la recta BC.

Problema 5. Un plano tiene un punto especial O llamado origen. Sea P un conjunto de 2021 puntos en el plano que cumple las siguientes dos condiciones: (i) no hay tres puntos de P sobre una misma recta, (ii) no hay dos puntos de P sobre una misma recta que pasa por el origen. Se dice que un triángulo con vértices en P es gordo si O es un punto interior de dicho triángulo. Encuentre la mayor cantidad de triángulos gordos que puede haber.

Problema 6. Determine si existe un entero no negativo a para el cual la ecuación

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

tiene más de un millón de soluciones diferentes (m, n) con m y n enteros positivos. Nota: la expresión $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera (o piso) del número real x. Por ejemplo, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ y $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

EGMO 2020

Problema 1. Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ enteros positivos tales que

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Demuestre que al menos uno de los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ es divisible por 2^{2020}.

Problema 2. Encontrar todas las listas $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ de números reales no negativos tales que se satisfagan las tres condiciones siguientes:
$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$; $x_{2020} \leq x_1 + 1$; Existe una permutación $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ tal que

$$\sum_{I=1}^{2020}((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8\sum_{i=1}^{2020} x_i^3$$

Una permutación de una lista es una lista de la misma longitud, con los mismos elementos pero en un orden cualquiera. Por ejemplo, $(2, 1, 2)$ es una permutación de $(1, 2, 2)$, y ambas son permutaciones de $(2, 2, 1)$. En particular cualquier lista es una permutación de ella misma.

Problema 3. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que $\angle A = \angle C = \angle E$ y $\angle B = \angle D = \angle F$. Además, las bisectrices interiores de los ángulos $\angle A, \angle C$ y $\angle E$ son concurrentes. Demuestre que las bisectrices interiores de los ángulos $\angle B, \angle D$ y $\angle F$ también son concurrentes. La notación $\angle A$ hace referencia al ángulo $\angle FAB$. Lo mismo se aplica a los otros ángulos del hexágono.

Problema 4. Una permutación de los enteros $1, 2, \ldots, m$ se llama fresca si no existe ningún entero positivo $k < m$ tal que los primeros k elementos de la permutación son los números $1, 2, \ldots, k$ en algún orden. Sea f_m el número de permutaciones frescas de los enteros $1, 2, \ldots, m$. Muestra que

$$f_n \geq n \cdot f_{n-1}$$

para todo $n \geq 3$. Por ejemplo, para $m = 4$ la permutación $(3, 1, 4, 2)$ es fresca, mientras que la permutación $(2, 3, 1, 4)$ no lo es.

Problema 5. Considere el triángulo ABC con $\angle BCA > 90°$. Sea R el radio del circuncírculo Γ de ABC. En el segmento AB existe un punto P con $PB = PC$ tal que la longitud de PA es igual a R. La mediatriz de PB corta a Γ en los puntos D y E. Demuestre que P es el incentro del triángulo CDE.

Problema 6. Sea $m > 1$ un entero. Se define una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como $a_1 = a_2 = 1$, $a3 = 4$, y para todo $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Determine todos los enteros m tales que cada término de la sucesión es un cuadrado perfecto.

EGMO 2019

Problema 1. Encuentre todas las ternas (a, b, c) de números reales tales que $ab + bc + ca = 1$ y

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Problema 2. Sea n un entero positivo. En un tablero de $2n \times 2n$ casillas se colocan dominós de manera que cada casilla del tablero sea adyacente a exactamente una casilla cubierta por un dominó. Para cada n, determine la mayor cantidad de dominós que se pueden poner de esa manera. Nota: Un dominó es una ficha de 1×2 o de 2×1 cuadrados unitarios. Los dominós son colocados en el tablero de manera que cada dominó cubre exactamente dos casillas del tablero y los dominós no se superponen (no se traslapan). Decimos que dos casillas son adyacentes si son diferentes y tienen un lado en común.

Problema 3. Sea ABC un triángulo tal que $\angle CAB > \angle ABC$, y sea I su incentro. Sea D el punto en el segmento BC tal que $\angle CAD = \angle ABC$. Sea γ la circunferencia que pasa por I y es tangente a la recta AC en el punto A. Sea X el segundo punto de intersección de γ con la circunferencia circunscrita de ABC. Muestre que las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle CXB$ se intersecan en un punto de la recta BC.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con incentro I. La circunferencia que pasa por B y es tangente a la recta AI en el punto I corta al lado AB por segunda vez en P. La circunferencia que pasa por C y es tangente a la recta AI en el punto I corta al lado AC por segunda vez en Q. Muestre que PQ es tangente a la circunferencia inscrita del triángulo ABC.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un número entero, y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos. Muestre que existen enteros positivos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que cumplen las siguientes tres condiciones: $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$; los residuos de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ al dividirlos entre n son todos diferentes; y

$$b_1 + b_2 + \cdots b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \right\rfloor\right)$$

Nota: Denotamos por $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera del número real x, es decir, al mayor entero que es menor o igual a x.

Problema 6. Alina traza 2019 cuerdas en una circunferencia. Los puntos extremos de éstas son todos diferentes. Un punto se considera marcado si es de uno de los siguientes tipos: (i) uno de los 4038 puntos extremos de las cuerdas; o (ii) un punto de intersección de al menos dos de las cuerdas. Alina etiqueta con un número cada punto marcado. De los 4038 puntos del tipo (i), 2019 son etiquetados con un 0 y los otros 2019 puntos con un 1. Ella etiqueta cada punto del tipo (ii) con un entero arbitrario, no necesariamente positivo. En cada cuerda, Alina considera todos los segmentos entre puntos marcados consecutivos (si una cuerda tiene k puntos marcados, entonces tiene $k - 1$ de estos segmentos). Sobre cada uno de estos segmentos, Alina escribe dos números: en amarillo escribe la suma de las etiquetas de los puntos extremos del segmento, mientras que en azul escribe el valor absoluto de su diferencia. Alina se da cuenta que los $N + 1$ números amarillos son exactamente los números $0, 1, \ldots, N$. Muestre que al menos uno de los números azules es múltiplo de tres. Nota: Una cuerda es el segmento de recta que une dos puntos distintos en una circunferencia.

EGMO 2018

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $CA = CB$ y $\angle ACB = 120°$, y sea M el punto medio de AB. Sea P un punto variable de la circunferencia que pasa por A, B y C. Sea Q el punto en el segmento CP tal que $QP = 2QC$. Se sabe que la recta que pasa por P y que es perpendicular a la recta AB interseca a la recta MQ en un único punto N. Muestra que existe una circunferencia fija tal que N se encuentra en dicha circunferencia para todas las posibles posiciones de P.

Problema 2. Considere el conjunto

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, 4, \cdots\right\}.$$

(a) Muestra que todo entero $x \geq 2$ puede ser escrito como el producto de uno o más elementos de A, no necesariamente distintos. (b) Para todo entero $x \geq 2$, sea $f(x)$ el menor entero tal que x puede ser escrito como el producto de $f(x)$ elementos de A, no necesariamente distintos. Demuestre que existen infinitos pares (x, y) de enteros con $x \geq 2$, $y \geq 2$, tales que

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

Nota: Los pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son diferentes si $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$.

Problema 3. Las n concursantes de cierta EGMO se llaman $C_1, \ldots, C_n$. Después de la competencia, se ponen en fila fuera del restaurante de acuerdo a las siguientes reglas: El Jurado escoge el orden inicial de las concursantes en la fila. Cada minuto, el Jurado escoge un entero i con $1 \leq i \leq n$. – Si la concursante C_i tiene al menos otras i concursantes delante de ella, le paga una moneda al Jurado y se mueve exactamente i posiciones adelante en la fila. – Si la concursante C_i tiene menos de i concursantes delante de ella, el restaurante se abre y el proceso termina.

(a) Muestra que el proceso no puede continuar indefinidamente, sin importar las elecciones del Jurado. (b) Determine para cada n el máximo número de monedas que el Jurado puede recolectar escogiendo el orden inicial y la secuencia de movimientos astutamente.

Problema 4. Un dominó es una ficha de 1×2 o de 2×1 cuadrados unitarios. Sea $n \geq 3$ un entero. Se ponen dominós en un tablero de $n \times n$ casillas de tal manera que cada dominó cubre exactamente dos casillas del tablero sin superponerse (en otras palabras, sin traslaparse). El valor de una fila o columna es el número de dominós que cubren al menos una casilla de esta fila o columna. Una configuración de dominós se llama balanceada si existe algún entero $k \geq 1$ tal que cada fila y cada columna tiene valor k. Demuestre que existe una configuración balanceada para cada $n \geq 3$, y encuentre el mínimo número de dominós necesarios para una tal configuración.

Problema 5. Sea Γ la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo ABC. Una circunferencia Ω es tangente al segmento AB y tangente a Γ en un punto situado al mismo lado de la recta AB que C. La bisectriz del ángulo $\angle BCA$ interseca a Ω en dos puntos distintos P y Q. Demuestre que $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6. (a) Demuestre que para todo número real t tal que $0 < t < \frac{1}{2}$ existe un entero positivo n con la siguiente propiedad: para todo conjunto S de n enteros positivos existen dos elementos distintos x e y de S, y un entero no negativo m tal que $|x - my| \leq ty$.
(b) Determine si para todo número real t con $0 < t < \frac{1}{2}$ existe un conjunto infinito S de enteros positivos tal que $|x - my| > ty$ para todo par de elementos distintos x e y de S y para todo entero positivo m.

EGMO 2017

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que cumple que $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ y $\angle ABC > \angle CDA$. Sean Q y R puntos en los segmentos BC y CD, respectivamente, tales que la recta QR interseca las rectas AB y AD en los puntos P y S, respectivamente. Se sabe que $PQ = RS$. Sea M el punto medio de BD y sea N el punto medio de QR. Demuestra que los puntos M, N, A y C están en una misma circunferencia.

Problema 2. Encuentra el menor número entero positivo k para el que existe una coloración de los enteros positivos $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colores y una función $f : \mathbb{Z}_{>0}$ a $\mathbb{Z}_{>0}$ con las dos propiedades siguientes:

(i) Para todos los enteros positivos m, n del mismo color, $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Hay enteros positivos m, n tales que $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

En una coloración de $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colores, cada entero está coloreado exactamente en uno de los k colores. Tanto en (i) como en (ii) los enteros positivos m, n no son necesariamente distintos.

Problema 3. Se consideran 2017 rectas en el plano tales que no hay tres de ellas que pasen por el mismo punto. La hormiga Turbo se coloca en un punto de una recta (distinto de los puntos de intersección) y empieza a moverse sobre las rectas de la siguiente manera: se mueve en la recta en la que está hasta que llega al primer punto de intersección, ahí cambia de recta torciendo a la izquierda o a la derecha, alternando su elección en cada intersección a la que llega. Turbo solo puede cambiar de dirección en los puntos de intersección. ¿Puede existir un segmento de recta por el cual la hormiga viaje en ambos sentidos?

Problema 4. Sea $n \geq 1$ un entero y sean $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ enteros positivos. En un grupo de $t_n + 1$ personas, se juegan algunas partidas de ajedrez. Dos personas pueden jugar entre sí a lo más una vez. Demuestra que es posible que las siguientes dos condiciones se den al mismo tiempo: (i) El número de partidas jugadas por cada persona es uno de los números $t_1, t_2, ..., t_n$. (ii) Para cada i con $1 \leq ilen$, hay al menos una persona que juega exactamente t_i partidas de ajedrez.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un entero. Una n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de enteros positivos no necesariamente distintos es costosa si existe un entero positivo k tal que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existe una n-tupla costosa. b) Demuestra que para todo entero positivo impar m existe un entero $n \geq 2$ tal que m pertenece a una n-tupla costosa.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo que no tiene dos lados con la misma longitud. Las reflexiones del gravicentro G y el circuncentro O de ABC con respecto a los lados BC, CA, AB se denotan como G_1, G_2, G_3, y O_1, O_2, O_3, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos $G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A$ y ABC tienen un punto en común.

EGMO 2016

Problema 1. Sean n un entero positivo impar, y $x_1, \ldots, x_n$ números reales no negativos. Muestra que

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_jx_{j+1})$$

donde $x_{n+1} = x_1$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y X la intersección de las diagonales AC y BD. Sean C_1, D_1 y M los puntos medios de los segmentos CX, DX y CD, respectivamente. Las rectas AD_1 y BC_1 se intersecan en Y , la recta MY interseca a las diagonales AC y BD en dos puntos distintos, que llamamos respectivamente E y F . Demostrar que la recta XY es tangente a la circunferencia que pasa por E, F y X.

Problema 3. Sea m un entero positivo. Se considera un tablero de $4m \times 4m$ casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están relacionadas si pertenecen ya sea a la misma fila o a la misma columna. Ninguna casilla está relacionada con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul de tal manera que cada casilla está relacionada con al menos dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

Problema 4. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se intersecan en un punto que pertenece a ω.

Problema 5. Sean k y n enteros tales que $k \geq 2$ y $k \leq n \leq 2k-1$. Se ponen piezas rectangulares, cada una de tamaño $1 \times k$ ó $k \times 1$, en un tablero de $n \times n$ casillas cuadradas, de forma que cada pieza cubra exactamente k casillas del tablero y que no haya dos piezas superpuestas. Se hace esto hasta que no se puedan colocar más piezas. Para cada n y k que cumplen las condiciones anteriores, determinar el mínimo número de piezas que puede contener dicho tablero.

Problema 6. Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que n^4 tiene un divisor en el conjunto $\{n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n\}$. Demostrar que hay infinitos elementos en S de cada una de las formas $7m, 7m+1, 7m+2, 7m+5$ y $7m+6$, pero S no contiene elementos de la forma $7m+3$ y $7m+4$, para m entero.

EGMO 2015

Problema 1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo, y sea D el pie de la altura trazada desde C. La bisectriz de $\angle ABC$ intersecta a CD en E y vuelve a intersectar al circuncírculo ω de $\triangle ADE$ en F. Si $\angle ADF = 45°$, muestra que CF es tangente a ω.

Problema 2. Una ficha de dominó es de 2×1 o de 1×2 cuadrados unitarios. Determina de cuántas maneras distintas se pueden acomodar exactamente n^2 fichas de dominó en un tablero de ajedrez de tamaño $2n \times 2n$ de forma que cualquier cuadrado de 2×2 contiene al menos dos cuadrados unitarios sin cubrir que están en la misma fila o en la misma columna.

Problema 3. Sean n y m enteros mayores a 1, y sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enteros positivos menores o iguales a n^m. Demuestra que existen enteros positivos $b_1, b_2, \ldots, b_m$ menores o iguales a n, tales que

$$mcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

donde $mcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ denota el máximo común divisor de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Problema 4. Determina si existe una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de enteros positivos que satisface la igualdad

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

para todo entero positivo n.

Problema 5. Sean m y n enteros positivos con $m > 1$. Anastasia particiona el conjunto de enteros $1, 2, \ldots, 2m$ en m parejas. Luego Boris escoge un entero de cada pareja y suma los enteros escogidos. Demuestra que Anastasia puede elegir las parejas de manera que Boris no pueda hacer que su suma sea igual a n.

Problema 6. Sea H el ortocentro y G el gravicentro del triángulo acutángulo $\triangle ABC$, con $AB \neq AC$. La línea AG intersecta al circuncírculo de $\triangle ABC$ en A y en P. Sea P' la reflexión de P sobre la línea BC. Demuestra que $\angle CAB = 60°$ si y solo si $HG = GP'$.

EGMO 2014

Problema 1. Determina todos los números reales t tales que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado, entonces $a^2 + bct, b^2 + cat, c^2 + abt$ son también las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado.

Problema 2. Sean D y E puntos en los lados AB y AC de un triángulo ABC, respectivamente, y tales que $DB = BC = CE$. Sean F el punto de intersección de las rectas CD y BE, I el incentro del triángulo ABC, H el ortocentro del triángulo DEF y M el punto medio del arco BAC del circuncírculo del triángulo ABC. Demuestra que I, H y M son colineales.

Problema 3. Denotamos por $d(m)$ el número de divisores positivos de un entero positivo m, y por $\omega(m)$ el número de primos distintos que dividen a m. Sea k un entero positivo. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $\omega(n) = k$ y $d(n)$ no divide a $d(a^2 + b^2)$ para todos los enteros positivos a y b tales que $a + b = n$.

Problema 4. Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existen enteros $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ que satisfacen la siguiente condición: si $0 < i < n$, $0 < j < n$ con $i \neq j$ y $2i + j$ divisible entre n, entonces $x_i < x_j$.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Se tienen n cajas y cada caja contiene un número no negativo de f5chas. Un movimiento consiste en tomar dos f5chas de una de las cajas, dejar una fuera de las cajas y poner la otra en otra caja. Decimos que una configuración de f5chas es resoluble si es posible aplicar un número finito de movimientos (que puede ser igual a cero) para obtener una configuración en la que no haya cajas vacías. Determinar todas las configuraciones iniciales de f5chas que no son resolubles y se vuelven resolubles al agregar una f5cha en cualquiera de las cajas (sin importar en cual caja se pone la f5cha).

Problema 6. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

para todos números reales x y y.

EGMO 2013

Problema 1. El lado BC del triángulo ABC se prolonga más allá de C hasta D de modo que $CD = BC$. El lado CA se prolonga más allá de A hasta E de modo que $AE = 2CA$. Demostrar que, si $AD = BE$, el triángulo ABC es rectángulo.

Problema 2. Determine todos los enteros m para los que el cuadrado $m \times m$ se puede diseccionar en cinco rectángulos, cuyas longitudes de los lados son los enteros $1, 2, 3, \ldots, 10$ en algún orden.

Problema 3. Sea n un entero positivo.

(a) Demostrar que existe un conjunto S de $6n$ enteros positivos diferentes entre sí, tal que el mínimo común múltiplo de dos elementos cualesquiera de S no es mayor que $32n^2$.

(b) Demostrar que todo conjunto T de $6n$ enteros positivos distintos por pares contiene dos elementos cuyo mínimo común múltiplo es mayor que $9n^2$.

Problema 4. Encontrar todos los enteros positivos a y b para los que hay tres enteros consecutivos en los que el polinomio

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

toma valores enteros.

Problema 5. Sea Ω el circuncírculo del triángulo ABC. La circunferencia ω es tangente a los lados AC y BC, y es internamente tangente a la circunferencia Ω en el punto P. Una recta paralela a AB que corta el interior del triángulo ABC es tangente a ω en Q.

Demostrar que $\angle ACP = \angle QCB$.

Problema 6. Blancanieves y los siete enanos viven en su casa del bosque. En cada uno de 16 días consecutivos, algunos de los enanos trabajaron en la mina de diamantes mientras los restantes recogían bayas en el bosque. Ningún enano realizó ambos tipos de trabajo el mismo día. En dos días diferentes (no necesariamente consecutivos), al menos tres enanos realizaron cada uno ambos tipos de trabajo. Además, el primer día, los siete enanos trabajaron en la mina de diamantes. Demuestra que, en uno de estos 16 días, los siete enanos estuvieron recogiendo bayas.

EGMO 2012

Problema 1. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Los puntos D, E, F se encuentran en los interiores de los lados BC, CA, AB respectivamente, de forma que DE es perpendicular a CO y DF es perpendicular a BO. (Por interior entendemos, por ejemplo, que el punto D se encuentra en la recta BC y D está entre B y C en dicha recta). Sea K el circuncentro del triángulo AFE. Demostrar que las rectas DK y BC son perpendiculares.

Problema 2. Sea n un entero positivo. Encontrar el mayor entero posible m, en términos de n, con la siguiente propiedad: una cuadrícula con m filas y n columnas puede llenarse con números reales de tal manera que para dos filas diferentes $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ y $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ se cumple que $\max\left(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, ..., |a_n - b_n|\right) = 1$.

Problema 3. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f\left(yf(x+y) + f(x)\right) = 4x + 2yf(x+y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Un conjunto A de enteros se denomina de "suma completa"si $A \subseteq A + A$, es decir, cada elemento $a \in A$ es la suma de algún par de elementos $b, c \in A$ (no necesariamente diferentes). Se dice que un conjunto A de enteros es "libre de suma cero"si 0 es el único entero que no puede expresarse como la suma de los elementos de un subconjunto finito no vacío de A. ¿Existe un conjunto de suma completa libre de suma cero?

Problema 5. Los números p y q son primos y satisfacen

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

para algún entero positivo n. Encontrar todos los valores posibles de $q - p$.

Problema 6. Hay infinitas personas registradas en la red social Mugbook. Algunas parejas de usuarios (diferentes) están registradas como amigos, pero cada persona sólo tiene un número finito de amigos. Cada usuario tiene al menos un amigo. (La amistad es mutua; es decir, si A es amigo de B, entonces B es amigo de A). Cada persona debe designar a uno de sus amigos como su mejor amigo. Si A designa a B como su mejor amigo, entonces (por desgracia) no se deduce que B designe necesariamente a A como su mejor amigo. A alguien designado como mejor amigo se le llama mejor amigo 1. En términos más generales, si $n > 1$ es un número entero positivo, entonces un usuario es un n-mejor amigo siempre que haya sido designado como mejor amigo de alguien que sea un $(n-1)$-mejor amigo. Alguien que es un k-mejor amigo para cada entero positivo k se llama popular. (a) Demuestre que toda persona popular es el mejor amigo de una persona popular. (b) Demuestre que si la gente puede tener infinitos amigos, entonces es posible que una persona popular no sea el mejor amigo de una persona popular.

Problema 7. Sea ABC un triángulo acutángulo con circunferencia Γ y ortocentro H. Sea K un punto de Γ en el otro lado de BC desde A. Sea L la reflexión de K en la recta AB, y sea M la reflexión de K en la recta BC. Sea E el segundo punto de intersección de Γ con la circunferencia del triángulo BLM. Demostrar que las rectas KH, EM y BC son concurrentes.

Problema 8. Una palabra es una secuencia finita de letras de algún alfabeto. Una palabra es repetitiva si es una concatenación de al menos dos subpalabras idénticas (por ejemplo, *ababab* y *abcabc* son repetitivas, pero *ababa* y *aabb* no lo son). Demostrar que si una palabra tiene la propiedad de que el intercambio de dos letras adyacentes cualquiera hace que la palabra sea repetitiva, entonces todas sus letras son idénticas.

IV. Problemas IMO

Problemas Resueltos

IMO	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2022						
2021						
2020						
2019						
2018						
2017						
2016						
2015						
2014						
2013						
2012						
2011						
2010						
2009						
2008						
2007						
2006						
2005						
2004						
2003						
2002						
2001						
2000						

IMO 2022

Problema 1. El banco de Oslo tiene dos tipos distintos de monedas: aluminio (denotado A), y bronce (denotado B). Marianne tiene n monedas de aluminio y n monedas de bronce en una fila, en orden aleatorio. Una cadena es cualquier subsecuencia de monedas consecutivas del mismo tipo. Dado un entero positivo $k \leq 2n$, Gilberty hace la siguiente operación varias veces: encuentra la cadena más larga que contiene a la k-ésima moneda (de izquierda a derecha) y mueve toda la cadena a el extremo izquierdo de la fila. Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 4$, el proceso empezando desde $AABBBABA$ sería

$$AABBBABA \to BBBAAABA \to AAABBBBA \to BBBBAAAA \to ...$$

Encuentra todas las parejas (n, k) con $1 \leq k \leq 2n$ tales que para cualquier orden inicial de la fila, en algún momento las n monedas de la izquierda serán todas iguales.

Problema 2. Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los reales positivos. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}^+$, existe exactamente una $y \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Problema 3. Sea k un entero positivo y S un conjunto finito de primos impares. Muestra que a lo más hay una manera (sin contar rotación ni reflexión) de colocar los elementos de S alrededor de un círculo tal que el producto de cualesquiera dos vecinos es de la forma x^2+x+k, para algún entero positivo x.

Problema 4. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $BC = DE$. Supongamos que existe un punto T en el interior de $ABCDE$ tal que $TB = TD$, $TC = TE$ y $\angle ABT = \angle TEA$. La recta AB corta a las rectas CD y CT en los puntos P y Q, respectivamente. Supongamos que los puntos P, B, A, Q aparecen sobre su recta en este orden. La recta AE corta a las rectas CD y DT en los puntos R y S, respectivamente. Supongamos que los puntos R, E, A, S aparecen sobre su recta en este orden. Demostrar que los puntos P, S, Q, R están en una misma circunferencia.

Problema 5. Hallar todas las ternas (a, b, p) de números enteros positivos con p primo que satisfacen

$$a^p = b! + p.$$

Problema 6. Sea n un número entero positivo. Un *cuadrado nórdico* es un tablero de $n \times n$ que contiene todos los números del 1 al n^2 de modo que cada celda contiene exactamente un número. Dos celdas diferentes son adyacentes si comparten un mismo lado. Una celda que solamente es adyacente a celdas que contienen números mayores se llama un *valle*. Un *camino ascendente* es una sucesión de una o más celdas tales que:

1. la primera celda de la sucesión es un valle,
2. cada celda subsiguiente de la sucesión es adyacente a la celda anteiror, y
3. los números escritos en las celdas de la sucesión están en orden creciente.

Hallar, como función de n, el menor número total de caminos ascendentes en un cuadrado nórdico.

IMO 2021

Problema 1. Sea $n \geq 100$ un entero. Iván escribe cada uno de los números $n, n+1, \ldots, 2n$ en un naipe diferente. Después de barajar estos $n+1$ naipes, los divide en dos pilas distintas. Probar que al menos una de esas pilas contiene dos naipes tales que la suma de sus números es un cuadrado perfecto.

Problema 2. Probar que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

se satisface para cualquier elección de números reales $x_1, \ldots, x_n$.

Problema 3. Sea D un punto interior de un triángulo acutángulo ABC, con $AB > AC$, de forma que $\angle DAB = \angle CAD$. El punto E en el segmento AC satisface que $\angle ADE = \angle BCD$, el punto F en el segmento AB satisface $\angle FDA = \angle DBC$, y el punto X en la recta AC satisface $CX = BX$. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos ADC y EXD respectivamente. Probar que las rectas BC, EF y O_1O_2 son concurrentes.

Problema 4. Sean Γ una circunferencia con centro I y $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que cada uno de los segmentos AB, BC, CD y DA es tangente a Γ. Sea Ω la circunferencia circunscrita del triángulo AIC. La prolongación de BA más allá de A corta a Ω en X, y la prolongación de BC más allá de C corta a Ω en Z. Las prolongaciones de AD y CD más allá de D cortan a Ω en Y y T respectivamente. Probar que

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problema 5. Dos ardillas, Ardi y Dilla, han recolectado 2021 nueces para el invierno. Ardi numera las nueces desde 1 hasta 2021, y excava 2021 pequeños hoyos en el suelo en una disposición circular alrededor de su árbol favorito. A la mañana siguiente, Ardi observa que Dilla ha colocado una nuez en cada hoyo, pero sin tener en cuenta la numeración. No contenta con esto, Ardi decide reordenar las nueces realizando una secuencia de 2021 movimientos. En el k-ésimo movimiento Ardi intercambia las posiciones de las dos nueces adyacentes a la nuez con el número k. Probar que existe un valor de k tal que, en el k-ésimo movimiento, las nueces intercambiadas tienen números a y b tales que $a < k < b$.

Problema 6. Sean $m \geq 2$ un entero, A un conjunto finito de enteros (no necesariamente positivos), y $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ subconjuntos de A. Suponemos que para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, la suma de los elementos de B_k es m^k. Probar que A contiene al menos $m/2$ elementos.

IMO 2020

Problema 1. Considere el cuadrilátero convexo $ABCD$. El punto P está en el interior de $ABCD$. Asuma las siguientes igualdades de razones:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

Demuestre que las siguientes tres rectas concurren en un punto: la bisectriz interna del ángulo $\angle ADP$, la bisectriz interna del ángulo $\angle PCB$ y la mediatriz del segmento AB.

Problema 2. Los números reales a, b, c, d son tales que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ y $a + b + c + d = 1$. Demuestre que

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Problema 3. Hay $4n$ piedritas de pesos $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Cada piedrita se colorea de uno de n colores de manera que hay cuatro piedritas de cada color. Demuestre que podemos colocar las piedritas en dos montones de tal forma que las siguientes dos condiciones se satisfacen: Los pesos totales de ambos montones son iguales. Cada montón contiene dos piedritas de cada color.

Problema 4. Sea $n > 1$ un entero. A lo largo de la pendiente de una montaña hay n^2 estaciones, todas a diferentes altitudes. Dos compañías de teleférico, A y B, operan k teleféricos cada una. Cada teleférico realiza el servicio desde una estación a otra de mayor altitud (sin paradas intermedias). Los teleféricos de la compañía A parten de k estaciones diferentes y acaban en k estaciones diferentes; igualmente, si un teleférico parte de una estación más alta que la de otro, también acaba en una estación más alta que la del otro. La compañía B satisface las mismas condiciones. Decimos que dos estaciones están unidas por una compañía si uno puede comenzar por la más baja y llegar a la más alta con uno o más teleféricos de esa compañía (no se permite otro tipo de movimientos entre estaciones). Determine el menor entero positivo k para el cual se puede garantizar que hay dos estaciones unidas por ambas compañías.

Problema 5. Se tiene una baraja de $n > 1$ cartas, con un entero positivo escrito en cada carta. La baraja tiene la propiedad de que la media aritmética de los números escritos en cada par de cartas es también la media geométrica de los números escritos en alguna colección de una o más cartas. ¿Para qué valores de n se tiene que los números escritos en las cartas son todos iguales?

Problema 6. Pruebe que existe una constante positiva c para la que se satisface la siguiente afirmación: Sea $n > 1$ un entero y sea S un conjunto de n puntos del plano tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes de S es al menos 1. Entonces existe una recta ℓ separando S tal que la distancia de cualquier punto de S a ℓ es al menos $cn^{-1/3}$. (Una recta ℓ separa un conjunto de puntos S si ℓ corta a alguno de los segmentos que une dos puntos de S.) Nota. Los resultados más débiles que se obtienen al sustituir $cn^{-1/3}$ por $cn^{-\alpha}$ se podrán valorar dependiendo del valor de la constante $\alpha > 1/3$.

IMO 2019

Problema 1. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que, para todos los enteros a y b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problema 2. En el triángulo ABC, el punto A_1 está en el lado BC y el punto B_1 está en el lado AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tales que PQ es paralelo a AB. Sea P_1 un punto en la recta PB_1 distinto de B_1, con B_1 entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Análogamente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1 distinto de A_1, con A_1 entre Q y Q_1, y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Demostrar que los puntos P, Q, P_1, y Q_1 son concíclicos.

Problema 3. Una red social tiene 2019 usuarios, algunos de los cuales son amigos. Siempre que el usuario A es amigo del usuario B, el usuario B también es amigo del usuario A. Eventos del siguiente tipo pueden ocurrir repetidamente, uno a la vez: Tres usuarios A ,B ,y C tales que A es amigo de B y de C, pero B y C no son amigos, cambian su estado de amistad de modo que B y C ahora son amigos, pero A ya no es amigo ni de B ni de C. Las otras relaciones de amistad no cambian. Inicialmente, hay 1010 usuarios que tienen 1009 amigos cada uno, y hay 1009 usuarios que tienen 1010 amigos cada uno. Demostrar que hay una sucesión de este tipo de eventos después de la cual cada usuario es amigo como máximo de uno de los otros usuarios.

Problema 4. Encontrar todos los pares (k, n) de enteros positivos tales que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problema 5. El Banco de Bath emite monedas con una H en una cara y una T en la otra. Harry tiene n monedas de este tipo alineadas de izquierda a derecha. Él realiza repetidamente la siguiente operación: si hay exactamente $k > 0$ monedas con la H hacia arriba, Harry voltea la k-ésima moneda contando desde la izquierda; en caso contrario, todas las monedas tienen la T hacia arriba y él se detiene. Por ejemplo, si $n = 3$ y la configuración inicial es THT, el proceso sería $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que se detiene después de tres operaciones. (a) Demostrar que para cualquier configuración inicial que tenga Harry, el proceso se detiene después de un número finito de operaciones. (b) Para cada configuración inicial C, sea $L(C)$ el número de operaciones que se realizan hasta que Harry se detiene. Por ejemplo, $L(THT) = 3$ y $L(TTT) = 0$. Determinar el valor promedio de $L(C)$ sobre todas las $2n$ posibles configuraciones iniciales de C.

Problema 6. Sea I el incentro del triángulo acutángulo ABC con $AB \neq AC$. La circunferencia inscrita (o incírculo) ω de ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. La recta que pasa por D y es perpendicular a EF corta a ω nuevamente en R. La recta AR corta a ω nuevamente en P. Las circunferencias circunscritas (o circuncírculos) de los triángulos PCE y PBF se cortan nuevamente en Q. Demostrar que las rectas DI y PQ se cortan en la recta que pasa por A y es perpendicular a AI.

IMO 2018

Problema 1. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo acutángulo ABC. Los puntos D y E están en los segmentos AB y AC, respectivamente, y son tales que $AD = AE$. Las mediatrices de BD y CE cortan a los arcos menores AB y AC de Γ en los puntos F y G, respectivamente. Demostrar que las rectas DE y FG son paralelas (o son la misma recta).

Problema 2. Hallar todos los enteros $n \geq 3$ para los que existen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, tales que $a_{n+1} = a_1$ y $a_{n+2} = a_2$, y

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 3. Un "triángulo anti-Pascal.[es] una disposición de números en forma de triángulo equilátero de tal manera que cada número, excepto los de la última fila, es el valor absoluto de la diferencia de los dos números que están inmediatamente debajo de él. Determinar si existe un triángulo anti-Pascal con 2018 filas que contenga todos los enteros desde 1 hasta 1+2+$\cdots$+2018.

Problema 4. Un lugar es un punto (x, y) en el plano tal que x, y son ambos enteros positivos menores o iguales que 20. Al comienzo, cada uno de los 400 lugares está vacío. Ana y Beto colocan piedras alternadamente, comenzando con Ana. En su turno, Ana coloca una nueva piedra roja en un lugar vacío tal que la distancia entre cualesquiera dos lugares ocupados por piedras rojas es distinto de $\sqrt{5}$. En su turno, Beto coloca una nueva piedra azul en cualquier lugar vacío. (Un lugar ocupado por una piedra azul puede estar a cualquier distancia de cualquier otro lugar ocupado.) Ellos paran cuando alguno de los dos no pueda colocar una piedra. Hallar el mayor K tal que Ana pueda asegurarse de colocar al menos K piedras rojas, sin importar cómo Beto coloque sus piedras azules.

Problema 5. Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión infinita de enteros positivos. Supongamos que existe un entero $N > 1$ tal que para cada $n \geq N$ el número

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

es entero. Demostrar que existe un entero positivo M tal que $a_m = a_{m+1}$ para todo $m \geq M$.

Problema 6. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ satisface $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. El punto X en el interior de $ABCD$ es tal que

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{y} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Demostrar que $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

IMO 2017

Problema 1. Para cada entero $a_0 > 1$, se define la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tal que para cada $n \geq 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ si $\sqrt{a_n}$ es entero, y $a_{n+1} = a_n + 3$ en otro caso. Determinar todos los valores de a_0 para los que existe un número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Problema 2. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera números reales x, y, $f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$.

Problema 3. Un conejo invisible y un cazador juegan como sigue en el plano euclideano. El punto de partida A_0 del conejo, y el punto de partida B_0 del cazador son el mismo. Después de $n-1$ rondas del juego, el conejo se encuentra en el punto A_{n-1} y el cazador se encuentra en el punto B_{n-1}. En la n-ésima ronda del juego, ocurren tres hechos en el siguiente orden:

1. El conejo se mueve de forma invisible a un punto A_n tal que la distancia entre A_{n-1} y A_n es exactamente 1.

2. Un dispositivo de rastreo reporta un punto P_n al cazador. La única información segura que da el dispositivo al cazador es que la distancia entre P_n y A_n es menor o igual que 1.

3. El cazador se mueve de forma visible a un punto B_n tal que la distancia entre B_{n-1} y B_n es exactamente 1.

¿Es siempre posible que, cualquiera que sea la manera en que se mueva el conejo y cualesquiera que sean los puntos que reporte el dispositivo de rastreo, el cazador pueda escoger sus movimientos de modo que después de 10^9 rondas el cazador pueda garantizar que la distancia entre él mismo y el conejo sea menor o igual que 100?

Problema 4. Sean R y S puntos distintos sobre la circunferencia Ω tales que RS no es un diámetro de Ω. Sea ℓ la recta tangente a Ω en R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento RT. El punto J se elige en el menor arco RS de Ω de manera que Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo JST, intersecta a ℓ en dos puntos distintos. Sea A el punto común de Γ y ℓ más cercano a R. La recta AJ corta por segunda vez a Ω en K. Demostrar que la recta KT es tangente a Γ.

Problema 5. Sea $N \geq 2$ un entero dado. Los $N(N+1)$ jugadores de un grupo de futbolistas, todos de distinta estatura, se colocan en fila. Muestra que siempre es posible quitar $N(N-1)$ jugadores de esta fila, de modo que la fila resultante formada por los 2N jugadores restantes satisfaga las N condiciones siguientes:

- (1) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores más altos.
- (2) Que no quede nadie ubicado entre el tercer jugador más alto y el cuarto jugador más alto. $\cdots$
- (N) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores de menor estatura.

Problema 6. Un par ordenado (x, y) de enteros es un punto "primitivo"si el máximo común divisor de x, y es 1. Dado un conjunto finito S de puntos primitivos, demostrar que existen un entero positivo n y enteros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que, para cada (x, y) de S, se cumple:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

IMO 2016

Problema 1. El triángulo BCF es rectángulo en B. Sea A el punto de la recta CF tal que $FA = FB$ y F está entre A y C. Se elige el punto D de modo que $DA = DC$ y AC es bisectriz del ángulo $\angle DAB$. Se elige el punto E de modo que $EA = ED$ y AD es bisectriz del ángulo $\angle EAC$. Sea M el punto medio de CF. Sea X el punto tal que $AMXE$ es un paralelogramo (con $AM \parallel EX$ y $AE \parallel MX$). Demostrar que las rectas BD, FX, y ME son concurrentes.

Problema 2. Hallar todos los enteros positivos n para los que en cada casilla de un tablero $n \times n$ se puede escribir una de las letras I, M y O de manera que:

- En cada fila y en cada columna, un tercio de las casillas tiene I, un tercio tiene M y un tercio tiene O; y
- En cualquier línea diagonal compuesta por un número de casillas divisible por 3, exactamente un tercio de las casillas tienen I, un tercio tiene M y un tercio tiene O.

Nota: Las filas y las columnas del tablero $n \times n$ se numeran desde 1 hasta n, en su orden natural.

Problema 3. Sea $P = A_1A_2 \dots A_k$ un polígono convexo en el plano. Los vértices $A_1A_2 \dots A_k$ tienen coordenadas enteras y se encuentran sobre una circunferencia. Sea S el área de P. Sea n un entero positivo impar tal que los cuadrados de las longitudes de los lados de P son todos números enteros divisibles por n. Demostrar que $2S$ es un entero divisible por n.

Problema 4. Un conjunto de números enteros positivos se llama "fragante"si contiene al menos dos elementos, y cada uno de sus elementos tiene algún factor primo en común con al menos uno de los elementos restantes. Sea $P(n) = n^2 + n + 1$. Determinar el menor número entero positivo b para el cual existe algún número entero no negativo a tal que el conjunto

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

es fragrante.

Problema 5. En la pizarra está escrita la ecuación

$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)dots(x-2016)$$

que tiene 2016 factores lineales en cada lado. Determinar el menor valor posible de k para el cual pueden borrarse exactamente k de estos 4032 factores lineales, de modo que al menos quede un factor en cada lado y la ecuación que resulte no tenga soluciones reales

Problema 6. Se tienen $n \geq 2$ segmentos en el plano tales que cada par de segmentos se intersectan en un punto interior a ambos, y no hay tres segmentos que tengan un punto en común. Mafalda debe elegir uno de los extremos de cada segmento y colocar sobre él una rana mirando hacia el otro extremo. Luego silbará $n-1$ veces. En cada silbido, cada rana saltará inmediatamente hacia adelante hasta el siguiente punto de intersección sobre su segmento. Las ranas nunca cambian las direcciones de sus saltos. Mafalda quiere colocar las ranas de tal forma que nunca dos de ellas ocupen al mismo tiempo el mismo punto de intersección.

1. Demostrar que si n es impar, Mafalda siempre puede lograr su objetivo.
2. Demostrar que si n es par, Mafalda nunca logrará su objetivo.

IMO 2015

Problema 1. Decimos que un conjunto finito S de puntos en el plano es .^{eq}uilibrado"si para cada dos puntos distintos A y B en S hay un punto C en S tal que $AC = BC$. Decimos que S es "libre de centros"si para cada tre puntos distintos A, B, C en S no existe ningún punto P en S tal que $PA = PB = PC$.

- Demostrar que para todo $n \geq 3$ existe un conjunto de n puntos equilibrado.

- Determinar todos los enteros $n \geq 3$ para los que existe un conjunto de n puntos equilibrado y libre de centros.

Problema 2. Determinar todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos tales que cada uno de los números $ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$ es una potencia de 2.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > AC$. Sea Γ su circunferencia circunscrita, H su ortocentro, y F el pie de la altura desde A. Sea M el punto medio del segmento BC. Sea Q el punto de Γ tal que $\angle HQA = 90°$. Supongamos que los puntos A, B, C, K y Q son todos distintos y están sobre Γ en ese orden.
Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo KQH es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo FKM.

Problema 4. El triángulo ABC tiene circunferencia circunscrita Ω y circuncentro O. Una ciccunferencia Γ de centro A corta al segmento BC en los puntos D y E tales que B, D, E y C son todos diferentes y están en la recta BC en este orden. Sean F y G los puntos de intersección de Γ y Ω, tales que A, F, B, C y G están sobre Ω en este orden. Sea K el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo BDF y el segmento AB. Sea L el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo CGE y el segmento CA.
Supongamos que las rectas FK y GL son distintas y se cortan en el punto X. Demostrar que X está en la recta AO.

Problema 5. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f\left(x + f(x + y)\right) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

Para todos los números reales x, y.

Problema 6. La sucesión de enteros $a_1, a_2, \ldots$ satisface las siguientes condiciones:

1. $1 \leq a_j \leq 2015$ para todo $j \geq 1$;

2. $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ para todo $1 \leq k < \ell$.

Demostrar que existen dos enteros positivos b y N tales que

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

Para todos los enteros m y n que satisfacen $n > m \geq N$.

IMO 2014

Problema 1. Sea $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ una sucesión infinita de números enteros positivos. Demostrar que existe un único entero $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problema 2. Sea $n \geq 2$ un entero. Consideremos un tablero de tamaño $n \times n$ formado por n^2 cuadrados unitarios. Una configuración de n fichas en este tablero se dice que es "pacífica"si en cada fila y en cada columna hay exactamente una ficha. Hallar el mayor entero positivo k tal que, para cada configuración pacífica de n fichas, existe un cuadrado de tamaño $k \times k$ sin fichas en sus k^2 cuadrados unitarios.

Problema 3. En el cuadrilátero convexo $ABCD$, se tiene $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. La perpendicular a BD desde A corta a BD en el punto H. Los puntos S y T están en los lados AB y AD, respectivamente, y son tales que H está dentro del triángulo SCT y

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Demostrar que la recta BD es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo TSH.

Problema 4. Los puntos P y Q están en el lado BC del triángulo acutángulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Los puntos M y N están en las rectas AP y AQ, respectivamente, de modo que P es el punto medio de AM, y Q es el punto medio de AN. Demostrar que las rectas BM y CN se cortan en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

Problema 5. Para cada entero positivo n, el Banco de Ciudad del Cabo produce monedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada una colección finita de tales monedas (no necesariamente de distintos valores) cuyo valor total no supera $99+\frac{1}{2}$, demostrar que es posible separar esta colección en 100 o menos montones, de modo que el valor total de cada montón sea como máximo 1.

Problema 6. Un conjunto de rectas en el plano está en posición general si no hay dos que sean paralelas ni tres que pasen por el mismo punto. Un conjunto de rectas en posición general separa el plano en regiones, algunas de las cuales tienen área finita; a estas las llamamos sus regiones finitas. Demostrar que para cada n suficientemente grande, en cualquier conjunto de n rectas en posición general es posible colorear de azul al menos $\sqrt{n}$ de ellas de tal manera que ninguna de sus regiones finitas tenga todos los lados de su frontera azules.
Nota: A las soluciones que reemplacen $\sqrt{n}$ por $c\sqrt{n}$ se les otorgarán puntos dependiendo del valor de c.

IMO 2013

Problema 1. Demostrar que para cualquier par de enteros positivos k y n, existen k enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (no necesariamente distintos) tales que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problema 2. Una configuración de 4027 puntos del plano, de los cuales 2013 son rojos y 2014 azules, y no hay tres de ellos que sean colineales, se llama colombiana. Trazando algunas rectas, el plano queda dividido en varias regiones. Una colección de rectas es buena para una configuración colombiana si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- ninguna recta pasa por ninguno de los puntos de la configuración;
- ninguna región contiene puntos de ambos colores.

Hallar el menor valor de k tal que para cualquier configuración colombiana de 4027 puntos hay una colección buena de k rectas.

Problema 3. Supongamos que el excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A es tangente al lado BC en el punto A_1. Análogamente, se definen los puntos B_1 en CA y C_1 en AB, utilizando los excírculos opuestos a B y C respectivamente. Supongamos que el circuncentro del triángulo $A_1B_1C_1$ pertenece a la circunferencia que pasa por los vértices A, B y C. Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H, y sea W un punto sobre el lado BC, estrictamente entre B y C. Los puntos M y N son los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Se denota por ω_1 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BWN, y por X el punto de ω_1 tal que WX es un diámetro de ω_1. Análogamente, se denota por ω_2 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo CWM, y por Y el punto de ω_2 tal que WY es un diámetro de ω_2. Demostrar que los puntos X, Y y H son colineales.

Problema 5. Sea $\mathbb{Q}_{>0}$ el conjunto de los números racionales mayores que cero. Sea $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las tres siguientes condiciones:

1. $f(x)f(y) \geq f(xy)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
2. $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
3. existe un número racional $a > 1$ tal que $f(a) = a$.

Demostrar que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problema 6. Sea $n \geq 3$ un número entero. Se considera una circunferencia en la que se han marcado $n+1$ puntos igualmente espaciados. Cada punto se etiqueta con uno de los números $0, 1, \ldots, n$ de manera que cada número se usa exactamente una vez. Dos distribuciones de etiquetas se consideran la misma si una se puede obtener de la otra por una rotación de la circunferencia. Una distribución de etiquetas se llama bonita si, para cualesquiera cuatro etiquetas $a < b < c < d$, con $a + d = b + c$, la cuerda que une los puntos etiquetados a y d no corta la cuerda que une los puntos etiquetados b y c.
Sea M el número de distribuciones bonitas y N el número de pares ordenados (x, y) de enteros positivos tales que $x + y \leq n$ y $\mathrm{mcd}(x, y) = 1$. Demostrar que $M = N + 1$.

IMO 2012

Problema 1. Dado un triángulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este excírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BC. Demostrar que M es el punto medio de ST.

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero, y sean $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Demostrar que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Problema 3. El juego de la adivinanza del mentiroso es un juego para dos jugadores A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos por ambos jugadores.
Al principio del juego, el jugador A elige enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x en secreto, y le dice a B el verdadero valor de N. A continuación, el jugador B intenta obtener información acerca de x formulando preguntas a A de la siguiente manera: en cada pregunta, B especifica un conjunto arbitrario S de enteros positivos (que puede ser uno de los especificados en alguna pregunta anterior), y pregunta a A si x pertenece a S. El jugador B puede hacer tantas preguntas de ese tipo como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responderla inmediatamente con sí o no, pero puede mentir tantas veces como quiera. La única restricción es que entre cualesquiera $k + 1$ respuestas consecutivas, al menos una debe ser verdadera.
Cuando B haya formulado tantas preguntas como haya deseado, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X entonces gana B; en caso contrario, pierde. Demostrar que:

1. Si $n \geq 2^k$, entonces B puede asegurarse la victoria.
2. Para todo k suficientemente grande, existe un entero $n \geq 1{,}99^k$ tal que B no puede asegurarse la victoria.

Problema 4. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplen la siguiente igualdad:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Para todos los enteros a, b, c que satisfacen $a + b + c = 0$.

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BCA = 90°$, y sea D el pie de la altura desde C. Sea X un punto interior del segmento CD. Sea K el punto en el segmento AX tal que $BK = BC$. Análogamente, sea L el punto en el segmento BX tal que $AL = AC$. Sea M el punto de intersección de AL y BK.
Demostrar que $MK = ML$.

Problema 6. Hallar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

IMO 2011

Problema 1. Para cualquier conjunto $A = a_1, a_2, a_3, a_4$ de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ por s_A. Sean A el número de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para las cuales $a_i + a_j$ divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

Problema 2. Sea S un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En S no hay tres puntos colineales. Un remolino es un proceso que empieza con una recta ℓ que pasa por un único punto P de S. Se rota ℓ en el sentido de las manecillas del reloj con centro en P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de S al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentre otro punto de S. Este proceso continúa indefinidamente.
Demostrar que se puede elegir un punto P de S y una recta ℓ que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de S como centro de rotación un número infinito de veces.

Problema 3. Sea f una función del conjunto de los números reales en si mismo que satisface

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para todo par de números reales x, y. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.

Problema 4. Sea $n > 0$ un entero. Se dispone de una balanza de dos platillos y de n pesas cuyos pesos son $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Debemos colocar cada una de las n pesas en la balanza, una tras otra, de manera tal que el platillo de la derecha nunca sea más pesado que el platillo de la izquierda. En cada paso, elegimos una de las pesas que no ha sido colocada en la balanza, y la colocamos ya sea en el platillo de la izquierda o en el platillo de la derecha, hasta que todas las pesas hayan sido colocadas. Determinar el número de formas en las que esto se puede hacer.

Problema 5. Sea f una función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros positivos. Se supone que para cualesquiera dos enteros m y n, la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m - n)$. Demostrar que para todos los enteros m y n con $f(m) \leq f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Sea ℓ una recta tangente a Γ, y sean ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c las rectas que se obtienen al reflejar ℓ con respecto a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo determinado por las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c es tangente a la circunferencia Γ.

IMO 2010

Problema 1. Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que z.)

Problema 2. Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a Γ en D. Sea E un punto del arco BDC, y F un punto del segmento BC, tal que

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Sea G el punto medio de IF. Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre Γ.

Problema 3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

Es un cuadrado perfecto para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Problema 4. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y P un punto en el interior del triángulo. Las rectas AP, BP y CP cortan de nuevo a Γ en los puntos K, L y M, respectivamente. La recta tangente a Γ en C corta a la recta AB en S. Si se tiene que $SC = SP$, demuestre que $MK = ML$.

Problema 5. En cada una de las seis cajas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ hay inicialmente sólo una moneda. Se permiten dos tipos de operaciones:
Tipo 1: Elegir una caja no vacía B_j, con $1 \leq j \leq 5$. Retirar una moneda de B_j y añadir dos monedas a B_{j+1}.
Tipo 2: Elegir una caja no vacía B_k, con $1 \leq k \leq 4$. Retirar una moneda de B_k e intercambiar los contenidos de las cajas (posiblemente vacías) B_{k+1} y B_{k+2}.
Determine si existe una sucesión finita de estas operaciones que deja a las cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vacías y a la caja B_6 con exactamente $2010^{2010^{2010}}$ monedas. (Observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problema 6. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números reales positivos. Se tiene que para algún entero positivo s,

$$a_n = a_\ell + a_{n-\ell} \quad \text{for all} \quad n \geq N.$$

para todo $n > s$. Demuestre que existen enteros positivos ℓ y N , con $\ell \leq s$, tales que $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ para todo $n \geq N$.

IMO 2009

Problema 1. Sea n un entero positivo y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ enteros distintos en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que n divide a $a_i(a_{i+1} - 1)$ para $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Muestra que n no divide a $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Los puntos P y Q son puntos sobre los lados CA y AB, respectivamente. Sean K, L, y M los puntos medios de los segmentos BP, CQ, y PQ, respectivamente, y sea Γ el circuncírculo que pasa por K, L y M. Muestra que $OP = OQ$ si PQ es tangente a Γ.

Problema 3. Sea $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una secuencia estrictamente creciente de enteros positivos tal que las subsecuencias

$$s_{s_1},\ s_{s_2},\ s_{s_3},\ \ldots \qquad \text{y} \qquad s_{s_1+1},\ s_{s_2+1},\ s_{s_3+1},\ \ldots$$

están ambas en progresión aritmética. Muestra que la secuencia $s_1, s_2, s_3, \ldots$ está en progresión aritmética.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ intersecan los lados BC y CA en D y E, respectivamente. Sea K el incentro del triángulo ADC. Si $\angle BEK = 45°$, encuentra todos los valores posibles del ángulo $\angle CAB$.

Let ABC be a triangle with $AB = AC$. The angle bisectors of $\angle CAB$ and $\angle ABC$ meet the sides BC and CA at D and E , respectively. Let K be the incentre of triangle ADC. Suppose that $\angle BEK = 45°$. Find all possible values of $\angle CAB$.

Problema 5. Encuentra todas las funciones f de los enteros positivos a los enteros positivos tales que para todos los enteros positivos a y b, existe un triángulo no degenerado con longitud de lados

$$a, f(b) \text{ y } f(b + f(a) - 1).$$

Problema 6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos distintos y M un conjunto de $n-1$ enteros positivos que no contiene a $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Un saltamontes salta sobre la línea de los números reales, empezando en el 0. Hace n saltos a la derecha con longitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en algún orden. Muestra que el orden puede elegirse de manera que el saltamontes nunca pase por un número en M.

IMO 2008

Problema 1. Sea H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. El círculo Γ_A con centro sobre el punto medio de BC que pasa por H interseca a BC en los puntos A_1 y A_2. Los puntos B_1, B_2, C_1 y C_2 se definen de manera similar. Muestra que los seis puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 están sobre una misma circunferencia.

Problema 2.

- Muestra que
$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$
para cualesquiera números reales x, y, z distintos de 1 tales que $xyz=1$.

- Muestra que la igualdad es cierta para infinitas ternas de números racionales x, y, z distintos de 1 tales que $xyz=1$.

Problema 3. Muestra que hay infinitos enteros positivos n tales que n^2+1 tiene un primo divisor mayor a $2n+\sqrt{2n}$.

Problema 4. Encuentra todas las funciones $f:(0,\infty)\mapsto(0,\infty)$ tales que
$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$
para todos los números reales positivos $w,x,y,z,$ tales que $wx=yz$.

Problema 5. Sean n y k enteros positivos con $k\geq n$ tales que $k-n$ es par. Hay $2n$ lámparas numeradas $1,2,\ldots,2n$, todas apagadas. Se puede hacer una secuencia de pasos: en cada paso una lámpara se cambia de estado (apagado a prendido o prendido a apagado).

Sea N el número de secuencias de k pasos tales que al final de la secuencia las lámparas 1 a n están todas prendidas, y las lámparas $n+1$ a $2n$ están todas apagadas.

Sea M el número de secuencias de k pasos tales que al final de la secuencia las lámparas 1 a n están todas prendidas, y las lámparas $n+1$ a $2n$ están todas apagadas, y a demás ninguna de las lámparas $n+1$ a $2n$ son prendidas durante la secuencia de pasos.

Encuentra $\frac{N}{M}$.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $BA\neq BC$. Sean ω_1 y ω_2 los incírculos de los triángulos ABC y ADC, respectivamente. Supón que existe un círculo ω tangente a BA más allá de A y a BC más allá de C, que además es tangente a AD y CD. Muestra que las tangentes externas comunes a ω_1 y ω_2 se intersecan sobre ω.

IMO 2007

Problema 1. Sean $a_1, a_2, \ldots a_n$ números reales. Para cada i, $(1 \leq i \leq n)$, definimos

$$d_i = \text{máx}\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \text{mín}\{a_j \mid i \leq j \leq n\},$$

y sea $d = \text{máx}\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

- Muestra que para cualesquiera números reales $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$,

$$\text{máx}\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

- Muestra que existen números reales $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ que cumplen la igualdad en $(*)$.

Problema 2. Sean A, B, C, D y E cinco puntos tales que $ABCD$ es un paralelogramo y $BCED$ es cíclico. Sea ℓ una línea que pasa por A, interseca el interior del segmento DC en F, e interseca a la línea BC en G. Supón también que $EF = EG = EC$. Muestra que ℓ es la bisectriz del ángulo $\angle DAB$.

Problema 3. En una competencia matemática, algunos participantes son amigos (la amistad es mutua). Llamamos a un grupo de participantes una pandilla si cualesquiera dos miembros son amigos (los grupos de 1 participante son pandillas). El número de miembros de una pandilla es su tamaño.
Si el mayor tamaño de una pandilla en la competencia es par, muestra que los participantes se pueden separar en dos habitaciones tales que el tamaño de la mayor pandilla en cada habitación es igual.

Problema 4. En el triángulo ABC, la bisectriz del ángulo BCA interseca el circuncírculo de nuevo en R, la mediatriz de BC en P, y la mediatriz de AC en Q. Sean K y L los puntos medios de BC y AC, respectivamente. Muestra que los triángulos RPK y RQL tienen la misma área.

Problema 5. Sean a y b enteros positivos. Muestra que si $4ab-1$ divide a $(4a^2-1)^2$, entonces $a = b$.

Problema 6. Sea n un entero positivo. Sea

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$$

un conjunto de $(n+1)^3 - 1$ puntos en el plano tridimensional. Encuentra el menor número de planos tales que su unión contiene a S pero no a $(0, 0, 0)$.

IMO 2006

Problema 1. Sea ABC un triángulo con incentro I. Un punto P en el interior del triángulo satisface

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Muestra que $AP \geq AI$, y que la igualdad se da si y sólo si $P = I$.

Problema 2. Sea P un polígono regular de 2006 lados. Una diagonal es *buena* si sus extremos dividen el borde de P en dos partes, cada una compuesta de un número impar de lados de P. Los lados de P también son buenos.

Supongamos que P ha sido dividido en triángulos por 2003 diagonales que no se intersecan dentro de P. Encuentra el mayor número de triángulos isósceles con dos lados buenos que podrían aparecer en dicha configuración.

Problema 3. Encuentra el menor número real M tal que la desigualdad

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

es cierta para todos los números reales a, b y c.

Problema 4. Encuentra todas las parejas de enteros (x, y) tales que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes enteros y sea k un entero positivo. Considera el polinomio $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, donde P se itera k veces. Muestra que hay a lo más n enteros t tales que $Q(t) = t$.

Problema 6. A cada lado b de un polígono convexo P se le asigna el área máxima de un triángulo con lado b contenido en P. Muestra que la suma de las áreas asignadas a los lados de P es al menos el doble del área de P.

IMO 2005

Problema 1. Seis puntos se eligen en los lados de un triángulo equilátero ABC: A_1, A_2 en BC, B_1, B_2 en CA y C_1, C_2 en AB, tales que son los vértices de un hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ con lados de longitudes iguales. Muestra que las líneas A_1B_2, B_1C_2 y C_1A_2 concurren en un mismo punto.

Problema 2. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una secuencia de enteros con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Supón que para cada entero positivo n, los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tienen n residuos distindos al dividirse entre n. Muestra que cada entero está exactamente una vez en la secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Problema 3. Sean x, y, z números reales positivos tales que $xyz \geq 1$. Muestra que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

Problema 4. Encuentra todos los enteros positivos que son primos relativos con todos los términos de la secuencia infinita

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \; n \geq 1.$$

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $BC = DA$ y BC no es paralela a DA. Sean E y F dos puntos que varían sobre los lados BC y DA, respectivamente, tales que $BE = DF$. Las líneas AC y BD se encuentran en P, las líneas BD y EF se encuentran en Q, y las líneas EF y AC se encuentran en R. Muestra que los circuncírculos de los triángulos PQR tienen un punto común distinto a P sin importar la elección de E y F.

Problema 6. En una competncia matemática con 6 problemas, cualesquiera dos problemas fueron resueltos por más de $\frac{2}{5}$ participantes. Además, ningún participante resolvió los 6 problemas. Muestra que hay al menos dos participantes que resolvieron exactamente 5 problemas cada uno.

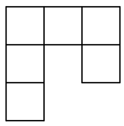
IMO 2004

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. El círculo con diámetro BC corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sea O el punto medio del lado BC. Las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle MON$ se intersecan en R. Muestra que los ciruncírculos de los triángulos BMR y CNR tienen un punto en común sobre el lado BC.

Problema 2. Encuentra todos los polinomios f con coeficientes reales tales que para cualesquiera reales a, b, c, con $ab + bc + ca = 0$, se cumple que

$$f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c).$$

Problema 3. Definimos un *gancho* como una figura de 6 cuadritos unitarios como la que está en la imagen, o cualquier figura obtenida por la imagen aplicando rotaciones y reflexiones. Encuentra todos los rectángulos de $m \times n$ que pueden ser cubiertos completamente sin hoyos ni sobrelaparse con ganchos.



Problema 4. Sea $n \geq 3$ un entero. Sean t_1, t_2, ..., t_n reales positivos tales que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Muestra que t_i, t_j, t_k pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo para toda i, j, k tales que $1 \leq i < j < k \leq n$.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que la diagonal BD no bisecta al ángulo ABC ni al ángulo CDA. El punto P está dentro de $ABCD$ y cumple

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{and} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Muestra que $ABCD$ es cíclico si y sólo si $AP = CP$.

Problema 6. Decimos que un entero positivo es .ªlternativo"si cualesquiera dos dígitos consecutivos en su representación decimal tienen paridad distinta. Encuentra todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo alternativo.

IMO 2003

Problema 1. Sea A un subconjunto de 101 elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Muestra que existen números t_1, $t_2, \ldots, t_{100}$ en S tales que cualesquiera dos conjuntos de la forma

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

no comparten elementos.

Problema 2. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

es un entero positivo.

Problema 3. Cada pareja de lados opuestos de un hexágono convexo tiene la siguiente propiedad: la distancia entre sus puntos medios es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces la suma de las longitudes de dichos lados. Muestra que todos los ángulos del hexágono son iguales.

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y P, Q, R, S los pies de perpendicular de D a las líneas BC, CA, y AB, respectivamente. Muestra que $PQ = QR$ si y sólo si las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ADC$ se intersecan sobre AC.

Problema 5. Sea n un entero positivo y $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ números reales. Muestra que la siguiente desigualdad se cumple:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

Muestra que la igualdad se logra si y sólo si los números $x_1, \ldots, x_n$ están en progresión aritmética.

Problema 6. Sea p un número primo. Muestra que existe un primo q tal que para todo entero n, el número $n^p - p$ no es múltiplo de q.

IMO 2002

Problema 1. Sea n un entero positivo. Sean x, y enteros no negativos tales que $x + y < n$. Cada punto (x, y) en el plano se colorea de rojo o azul, a partir de la siguiente condición: Si un punto (x, y) es rojo, entonces todos los puntos (x', y') con $x' \leq x$ y $y' \leq y$ también lo son. Sea A el número de maneras de elegir n puntos azules con coordenadas x distintas, y sea B el número de maneras distintas de elegir n puntos rojos con coordenadas y distintas. Muestra que $A = B$.

Problema 2. Sea Γ un círculo con centro O y diámetro BC. Sea A un punto sobre Γ tal que $\angle AOB < 120°$. Sea D el punto medio de el arco AB que no contiene a C. La línea paralela a AD que pasa por O corta a AC en I. La mediatriz de AO corta a Γ en E y F. Muestra que I es el incentro del triángulo CEF.

Problema 3. Encuentra todas las parejas de enteros positivos $m, n \geq 3$ tales que existen infinitos enteros positivos a tales que

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

es un entero.

Problema 4. Sea $n \geq 2$ un entero positivo con divisores $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Muestra que $d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k$ siempre es menor que n^2, y determina cuándo es un divisor de n^2.

Problema 5. Encuentra todas las funciones f de reales a reales tales que

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

para toda x, y, z, t.

Problema 6. Sea $n \geq 3$ un entero positivo, y sean $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ círculos unitarios en el plano, con centros $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$, respectivamente. Si no existe ninguna línea que pasa por más de dos de estos círculos, muestra que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

IMO 2001

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O, y P el pie de altura de A a BC. Si $\angle C \geq \angle B + 30°$, muestra que $\angle A + \angle COP < 90°$.

Problema 2. Muestra que para cualesquiera reales positivos a, b, c, se cumple que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Problema 3. 21 niñas y 21 niños participaron en un concurso matemático. Sucedió que cada participante resolvió a lo más seis problemas, y para cada pareja de niña-niño, hubo al menos un problema resuelto por ambos. Muestra que hubo un problema que fue resuelto por al menos tres niñas y al menos tres niños.

Problema 4. Sea n un entero impar mayor a 1 y sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ enteros. Para cada permutación $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, definimos $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Muestra que existen permutaciones distintas a y b de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $n!$ es divisor de $S(a) - S(b)$.

Problema 5. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 60°$. Sea AP la bisectriz de $\angle BAC$ y BQ la bisectriz de $\angle ABC$, con P sobre BC y Q sobre AC. Si $AB + BP = AQ + BQ$, encuentra los ángulos de ABC.

Problema 6. Sean $a > b > c > d$ enteros positivos tales que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Muestra que $ab + cd$ no es primo.

IMO 2000

Problema 1. Dos círculos Γ_1 y Γ_2 se cortan en los puntos M y N. Sea AB la línea tangente a estos círculos en A y B, respectivamente, tal que M está entre N y AB. Sea CD la línea paralela a AB que pasa por el punto M, con C en Γ_1 y D en Γ_2. Las líneas AC y BD se cortan en E, las líneas AN y CD se cortan en P, y las líneas BN y CD se cortan en Q. Muestra que $EP = EQ$.

Problema 2. Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Problema 3. Sea $n \geq 2$ un entero positivo y λ un real positivo. Inicialmente hay n pulgas en una línea horizontal, no todas en el mismo punto. Definimos un movimiento como elegir dos pulgas en puntos A y B (con A a la izquierda de B), y hacer que la pulga en A salte sobre la pulga B al punto C tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$. Encuentra todos los valores de λ tales que para cualquier punto M en la línea y cualquier posición inicial de las pulgas, existe una secuencia de movimientos que llevará a todas las pulgas a la derecha de M.

Problema 4. Un mago tiene 100 cartas numeradas del 1 al 100. Las coloca dentro de tres cajas, una roja, una azul y una blanca, de manera que cada caja contiene al menos una carta. Un miembro de la audiencia elige dos cartas de dos cajas diferentes y anuncia la suma de los números escritos en ellas. Después, el mago encuentra la caja de la que no se tomó ninguna carta. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar las cartas en las cajas para que el truco siempre funcione?

Problema 5. ¿Existe un entero positivo n que tiene 2000 divisores primos y divide a $2^n + 1$?

Problema 6. Sean AH_1, BH_2, CH_3 las alturas de un triángulo acutángulo ABC. Su incírculo toca a los lados BC, AC y AB en T_1, T_2 y T_3, respectivamente. Considera las imágenes simétricas de las líneas H_1H_2, H_2H_3 y H_3H_1 con respecto a las líneas T_1T_2, T_2T_3 y T_3T_1. Muestra que estas imágenes crean un triángulo cuyos vértices caen sobre el incírculo de ABC.

V. Problemas OIM

Problemas Resueltos

OIM	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2021						
2020						
2019						
2018						
2017						
2016						
2015						
2014						
2013						
2012						
2011						
2010						
2009						
2008						
2007						
2006						
2005						
2004						
2003						
2002						
2001						
2000						
1999						
1998						
1997						
1996						
1995						
1994						
1993						
1992						
1991						
1990						
1989						
1988						
1987						
1985						

OIM 2021

Problema 1. Sea $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_{10}\}$ un conjunto de 10 primos distintos y sea A el conjunto de todos los enteros mayores que 1 tales que en su descomposición en factores primos aparecen únicamente primos de P. Los elementos de A se colorean de tal forma que:

1. cada elemento de P tiene un color distinto,
2. si $m, n \in A$, entonces mn tiene el mismo color de m o n,
3. para cualquier par de colores distintos R y S, no existen $j, k, m, n \in A$ (no necesariamente distintos), con j, k de color R y m, n de color S, tales que j divide a m y n divide a k, simultáneamente.

Demuestre que existe un primo de P tal que todos sus múltiplos en A tienen el mismo color.

Problema 2. Considere un triángulo acutángulo ABC, con $AC > AB$, y sea Γ su circuncírculo. Sean E y F los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente. El circuncírculo del triángulo CEF y Γ se cortan en X y C, con $X \neq C$. La recta BX y la tangente a Γ por A se cortan en Y. Sea P el punto en el segmento AB tal que$YP = YA$, con $P \neq A$, y sea Q el punto donde se cortan AB y la paralela a BC que pasa por Y. Demuestre que F es el punto medio de PQ.
Nota:El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

Problema 3. Sea $a_1, a_2, a_3, \cdots$ una sucesión de enteros positivos y sea $b_1, b_2, b_3, \cdots$ la sucesión de números reales dada por

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots a_n}, n \geq 1$$

Demuestre que si entre cada millón de términos consecutivos de la sucesión $b_1, b_2, b_3, \cdots$ existe al menos uno que es entero, entonces existe algún k tal que $b_k > 2021^2 021$.

Problema 4. Sean a, b, c, x, y, z números reales tales que

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = c^2 + z^2 = (a+b)^2 + (x+y)^2 = (b+c)^2 + (y+z)^2 = (c+a)^2 + (z+x)^2$$

Demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Problema 5. Para un conjunto finito C de enteros, se define $S(C)$ como la suma de los elementos de C. Encuentre dos conjuntos no vacíos A y B cuya intersección es vacía, cuya unión es el conjunto $\{1, 2, \cdots, 2021\}$ y tales que el producto $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto.

Problema 6. Considere un polígono regular de n lados, $n \geq 4$, y sea V un subconjunto de r vértices del polígono. Demuestre que si $r(r-3) \geq n$, entonces existen al menos dos triángulos congruentes cuyos vértices pertenecen a V.

OIM 2020

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $AB < AC$. Los puntos medios de los lados AB y AC son M y N, respectivamente. Sean P y Q puntos en la recta MN tales que $\angle CBP = \angle ACB$ y $\angle QCB = \angle CBA$. La circunferencia circunscrita del triángulo ABP interseca a la recta AC en D ($D \neq A$) y la circunferencia circunscrita del triángulo AQC interseca a la recta AB en E ($E \neq A$). Demuestre que las rectas BC, DP y EQ son concurrentes.

Problema 2. Para cada entero positivo n, se define T_n como el menor entero positivo tal que $1 + 2 + \cdots + T_n$ es múltiplo de n. Por ejemplo, $T_5 = 4$ puesto que 1, $1 + 2$ y $1 + 2 + 3$ no son múltiplos de 5, pero $1 + 2 + 3 + 4$ sí es múltiplo de 5.
Determine todos los enteros positivos m tales que $T_m \geq m$.

Problema 3. Sea $n \geq 2$ un entero. Una sucesión $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de n números enteros se dice limeñasi

$$\operatorname{mcd}\{a_i - a_j \mid a_i > a_j, 1 \leq i, j \leq n\} = 1$$

Una operaciónconsiste en escoger dos elementos a_k y a_l de una sucesión, con $k \neq l$, y reemplazar a_l por $a'_l = 2a_k - a_l$.
Demuestre que, dada una colección de $2^n - 1$ sucesiones limeñas, cada una formada por n números enteros, existen dos de ellas, digamos β y γ, tales que es posible transformar β en γ mediante un número finito de operaciones.
Aclaración:Si todos los elementos de una sucesión son iguales, entonces esa sucesión no es limeña.

Problema 4. Demuestre que existe un conjunto C de 2020 enteros positivos y distintos que cumple simultáneamente las siguientes propiedades:

- Cuando se calcula el máximo común divisor de cada dos elementos de C, se obtiene una lista de números todos distintos.
- Cuando se calcula el mínimo común múltiplo de cada dos elementos de C, se obtiene una lista de números todos distintos.

Problema 5. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x - y)) + yf(x) = x + y + f(x^2)$$

para cualesquiera números reales x, y.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno. Sean H el ortocentro y O el circuncentro del triángulo ABC, y sea P un punto interior del segmento HO. La circunferencia de centro P y radio PA interseca nuevamente a las rectas AB y AC en los puntos R y S, respectivamente. Denotamos por Q el punto simétrico al punto P con respecto a la mediatriz de BC. Demuestre que los puntos P, Q, R y S pertenecen a una misma circunferencia.

OIM 2019

Problema 1. Para cada entero positivo n, sea $s(n)$ la suma de los cuadrados de los dígitos de n. Por ejemplo, $s(15) = 1^2 + 5^2 = 26$. Determina todos los enteros $n \geq 1$ tales que $s(n) = n$.

Problema 2. Determina todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros tales que para todo número real x se cumple

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1))$$

Problema 3. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. La paralela a AC que pasa por B corta a Γ en D ($D \neq B$) y la paralela a AB que pasa por C corta a Γ en E ($E \neq C$). Las rectas AB y CD se cortan en P, y las rectas AC y BE se cortan en Q. Sea M el punto medio de DE. La recta AM corta a Γ en Y ($Y \neq A$) y a la recta PQ en J. La recta PQ corta al circuncírculo del triángulo BCJ en Z ($Z \neq J$). Si las rectas BQ y CP se cortan en X, demuestra que X pertenece a la recta YZ.
Nota: El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ e inscrito en la circunferencia Γ. Sean P y Q dos puntos en el segmento AB (A, P, Q, B están en ese orden y son distintos) tales que $AP = QB$. Sean E y F los segundos puntos de intersección de las rectas CP y CQ con Γ, respectivamente. Las rectas AB y EF se cortan en G. Demuestra que la recta DG es tangente a Γ.

Problema 5. Don Miguel coloca una ficha en alguno de los $(n+1)^2$ vértices determinados por un tablero de $n \times n$. Una jugadaconsiste en mover la ficha desde el vértice en el que se encuentra a un vértice adyacente en alguna de las ocho posibles direcciones: $\uparrow, \downarrow, \rightarrow$ $, \leftarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$, siempre y cuando no se salga del tablero. Un recorridoes una sucesión de jugadas tal que la ficha estuvo en cada uno de los $(n+1)^2$ vértices exactamente una vez. ¿Cuál es la mayor cantidad de jugadas diagonales ($\nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$) que en total puede tener el recorrido?

Problema 6. Sean $a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$ enteros positivos y P un polinomio con coeficientes enteros tal que, para todo entero positivo n,

$$P(n) \mid a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2019}^n$$

Demuestra que P es un polinomio constante.

OIM 2018

Problema 1. Para cada número natural $n \geq 2$, hallar las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018}$$
$$x_2 = (x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018}$$
$$\cdots$$
$$x_n = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1})^{2018}$$

Problema 2. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 90°$ y $BA = CA$. Sea M el punto medio de BC. Un punto $D \neq A$ es elegido en la semicircunferencia de diámetro BC que contiene a A. La circunferencia circunscrita al triángulo DAM intersecta a las rectas DB y BC en los puntos E y F, respectivamente. Demostrar que $BE = CF$.

Problema 3. En un plano tenemos n rectas sin que haya dos paralelas, ni dos perpendiculares, ni tres concurrentes. Se elige un sistema de ejes cartesianos con una de las n rectas como eje de las abscisas. Un punto P se sitúa en el origen de coordenadas del sistema elegido y comienza a moverse a velocidad constante por la parte positiva del eje de las abscisas. Cada vez que P llega a la intersección de dos rectas, sigue por la recta recién alcanzada en el sentido que permite que el valor de la abscisa de P sea siempre creciente. Demostrar que se puede elegir el sistema de ejes cartesianos de modo que P pase por puntos de las n rectas.
Nota: El eje de las abscisas de un sistema de coordenadas del plano es el eje de la primera coordenada o eje de las x.

Problema 4. Un conjunto X de enteros positivos es ibéricosi X es un subconjunto de $\{2, 3, 4, \cdots, 2018\}$, y siempre que m y n pertenezcan a X, entonces el $\text{mcd}(m, n)$ pertenece también a X. Un conjunto ibérico es olímpicosi no está contenido en ningún otro conjunto ibérico. Encontrar todos los conjuntos ibéricos olímpicos que contienen el número 33.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Para una permutación $a_1, a_2, \cdots, a_n$, de los números $1, 2, \cdots, n$, definimos

$$b_k = \min_{1\leq i\leq k} a_i + \max_{1\leq j\leq k} a_j$$

para cada $k = 1, 2, \cdots, n$. Decimos que la permutación $a_1, a_2, \cdots, a_n$, es guadianasi la sucesión $b_1, b_2, \cdots, b_n$, no tiene dos elementos consecutivos iguales. ¿Cuántas permutaciones guadianas existen?

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB > BC$. Las mediatrices de AC y AB cortan a la recta BC en D y E, respectivamente. Sean P y Q puntos distintos de A sobre las rectas AC y AB, respectivamente, tales que $AB = BP$ y $AC = CQ$, y sea K la intersección de las rectas EP y DQ. Sea M el punto medio de BC. Demostrar que $\angle DKA = \angle EKM$.

OIM 2017

Problema 1. Para cada entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de sus dígitos. Decimos que n tiene la propiedad P si los términos de la sucesión infinita $n, S(n), S(S(n)), S(S(S(n))), \cdots$, son todos pares, y decimos que n tiene la propiedad I si los términos de esta sucesión son todos impares. Demostrar que entre todos los enteros positivos n tales que $1 \leq n \leq 2017$ son más los que tienen la propiedad I que los que tienen la propiedad P.

Problema 2. Sean ABC un triángulo rectángulo y Γ su circunferencia circunscrita. Sea D un punto en el segmento BC, distinto de B y de C, y sea M el punto medio de AD. La recta perpendicular a AB que pasa por D corta a AB en E y a Γ en F, con el punto D entre E y F. Las rectas FC y EM se cortan en el punto X. Si $\angle DAE = \angle AFE$, demostrar que la recta AX es tangente a Γ.

Problema 3. Consideramos las configuraciones de números enteros:
$a_{1,1}$,
$a_{2,1}, a_{2,2}$,
$a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}$,
$\ldots$
$a_{2017,1}, a_{2017,2}, a_{2017,3} \cdots a_{2017,2017}$
con $a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ para todos los i, j tales que $1 \leq j \leq i \leq 2016$.
Determinar la máxima cantidad de enteros impares que puede contener una tal configuración.

Problema 4. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB$ y O su circuncentro. Sea D un punto en el segmento BC tal que O está en el interior del triángulo ADC y $\angle DAO + \angle ADB = \angle ADC$. Llamamos P y Q a los circuncentros de los triángulos ABD y ACD, respectivamente, y M al punto de intersección de las rectas BP y CQ. Demostrar que las rectas AM, PQ y BC son concurrentes. Nota.El circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

Problema 5. Dado un entero positivo n, se escriben todos sus divisores enteros positivos en un pizarrón. Ana y Beto juegan al siguiente juego:
Por turnos, cada uno va a pintar uno de esos divisores de rojo o azul. Pueden elegir el color que deseen en cada turno, pero solo pueden pintar números que no hayan sido pintados con anterioridad. El juego termina cuando todos los números han sido pintados. Si el producto de los números pintados de rojo es un cuadrado perfecto, o si no hay ningún número pintado de rojo, gana Ana; de lo contrario, gana Beto. Si Ana tiene el primer turno, determinar para cada n quién tiene estrategia ganadora.

Problema 6. Sean $n > 2$ un entero positivo par y $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ números reales tales que $a_{k+1} - a_k \leq 1$ para todo k con $1 \leq k \leq n-1$. Sea A el conjunto de pares (i,j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $j - i$ par, y sea B el conjunto de pares (i,j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $j - i$ impar. Demostrar que

$$\prod_{(i,j)\in A} (a_j - a_i) > \prod_{(i,j)\in B} (a_j - a_i)$$

OIM 2016

Problema 1. Determinar todos los números primos positivos p, q, r, k tales que

$$pq + qr + rp = 12k + 1$$

Problema 2. Encontrar todas las soluciones reales positivas del sistema de ecuaciones

$$x = \frac{1}{y^2 + y - 1}, y = \frac{1}{z^2 + z - 1}, z = \frac{1}{x^2 + x - 1}$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Las tangentes a Γ por B y C se cortan en P. Sobre el arco AC que no contiene a B se toma un punto M, distinto de A y C, tal que la recta AM corta a la recta BC en K. Sean R el punto simétrico de P con respecto a la recta AM y Q el punto de intersección de las rectas RA y PM. Sean J el punto medio de BC y L el punto donde la recta paralela por A a la recta PR corta a la recta PJ. Demostrar que los puntos L, J, A, Q y K están sobre una misma circunferencia.

Problema 4. Determinar el mayor número de alfiles que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 8×8, de forma que no haya dos alfiles en la misma casilla y cada alfil sea amenazado como máximo por uno de los otros alfiles.
Nota.Un alfil amenaza a otro si ambos se encuentran en dos casillas distintas de una misma diagonal. El tablero tiene por diagonales las dos diagonales principales y las paralelas a ellas.

Problema 5. Las circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cortan en dos puntos distintos A y K. La tangente común a Γ_1 y Γ_2 más cercana a K toca a Γ_1 en B y a Γ_2 en C. Sean P el pie de la perpendicular desde B sobre AC, y Q el pie de la perpendicular desde C sobre AB. Si E y F son los puntos simétricos de K respecto de las rectas PQ y BC, probar que los puntos A, E y F son colineales.

Problema 6. Sea k un entero positivo y $a_1, a_2, \cdots a_k$ dígitos. Probar que existe un entero positivo n tal que los últimos $2k$ dígitos de 2^n son, en este orden, $a_1, a_2, \cdots a_k, b_1, b_2, \cdots b_k$, para ciertos dígitos $b_1, b_2, \cdots b_k$.

OIM 2015

Problema 1. El número 125 se puede representar como suma de varios números naturales que son mayores que 1 y coprimos dos a dos. Encuentre el máximo número de sumandos que puede tener tal representación.

Problema 2. Una recta r contiene los puntos A, B, C y D en ese orden. Sea P un punto fuera de r tal que $\angle APB = \angle CPD$. Pruebe que la bisectriz de $\angle APD$ corta a r en un punto G tal que

$$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GC} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GD}$$

Problema 3. Sean α y β raíces del polinomio $x^2 - qx + 1$, donde q es un número racional mayor que 2. Se define $s_1 = \alpha + \beta$, $t_1 = 1$ y, para cada entero $n \geq 2$,

$$s_n = \alpha^n + \beta^n, t_n = s_{n-1} + 2s_{n-2} + \cdots + (n-1)s_1 + n$$

Demuestre que, para todo n impar, t_n es el cuadrado de un número racional.

Problema 4. En el triángulo acutángulo ABC, el punto D es el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC. Sea P un punto del segmento AD. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD respectivamente. Demuestre que

$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}$$

Problema 5. Determine todos los pares (a, b) de números enteros que verifican

$$(b^2 + 7(a - b))^2 = a^3 b$$

Problema 6. Beto juega con su computadora al siguiente juego: inicialmente su computadora elige al azar 30 números de 1 a 2015, y Beto los escribe en un pizarrón (puede haber números repetidos); en cada paso, Beto elige un entero positivo k y algunos de los números escritos en el pizarrón, y le resta a cada uno de ellos el número k, con la condición de que los números resultantes sigan siendo no negativos. El objetivo del juego es lograr que en algún momento los 30 números resultantes sean iguales a 0, en cuyo caso el juego termina. Determine el menor número n tal que, independientemente de los números que inicialmente eligió su computadora, Beto pueda terminar el juego en a lo sumo n pasos.

OIM 2014

Problema 1. Para cada entero positivo n, se define $s(n)$ como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k)$$

Problema 2. Halla todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c, se cumple que

$$xP(x - c) = (x - 2014)P(x)$$

Problema 3. Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Problema 4. Se tienen N monedas, de las cuales $N - 1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente a las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas esas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de las alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X y Y, respectivamente. Si XY intersecta a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D, y Q están en una misma circunferencia.

Problema 6. Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ y, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1} = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de f si $f(a) = a$. Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x. Dado un número entero positivo n, decimos que $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ es *catracha* si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Pruebe que:

1. Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

2. Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

OIM 2013

Problema 1. Un conjunto S de enteros positivos se llama canalerosi para cualesquiera tres números $a, b, c \in S$, todos diferentes, se cumple que a divide a bc, b divide a ca y c divide a ab.

1. Demostrar que, para cualquier conjunto finito de enteros positivos $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$, existen infinitos enteros positivos k tales que el conjunto $\{kc_1, kc_2, \cdots, kc_n\}$ es canalero.

2. Demostrar que, para cualquier entero $n \geq 3$, existe un conjunto canalero que tiene exactamente n elementos y ningún entero mayor que 1 divide a todos sus elementos.

Problema 2. Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos XY de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY. Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.

Problema 3. Sea $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ con $n > 5$. Demostrar que existe un conjunto finito B de enteros positivos distintos tal que $A \subseteq B$ y tiene la propiedad

$$\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2$$

es decir, el producto de los elementos de B es igual a la suma de los cuadrados de los elementos de B.

Problema 4. Sean Γ una circunferencia de centro O, AE un diámetro de Γ y B el punto medio de uno de los arcos AE de Γ. El punto $D \neq E$ está sobre el segmento OE. El punto C es tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con AB paralelo a CD y BC paralelo a AD. Las rectas EB y CD se cortan en el punto F. La recta OF corta al arco menor EB de Γ en el punto I.
Demostrar que la recta EI es la bisectriz del ángulo BEC.

Problema 5. Sean A y B dos conjuntos tales que:

1. $A \cup B$ es el conjunto de los enteros positivos.

2. $A \cap B$ es el vacío.

3. Si dos enteros positivos tienen como diferencia a un primo mayor que 2013, entonces uno de ellos está en A y el otro en B.

Hallar todas las posibilidades para los conjuntos A y B.

Problema 6. Una *configuración* es un conjunto finito S de puntos del plano entre los cuales no hay tres colineales y a cada punto se le asigna algún color, de modo que si un triángulo cuyos vértices están en S tiene un ángulo mayor o igual a $120°$, entonces exactamente dos de sus vértices son de un mismo color.
Hallar el número máximo de puntos que puede tener una configuración.

OIM 2012

Problema 1. Sobre un rectángulo $ABCD$ se dibujan triángulos equiláteros BCX y DCY de modo que cada uno comparte puntos con el interior del rectángulo. La recta AX corta a la recta CD en P. La recta AY corta a la recta BC en Q. Demostrar que el triángulo APQ es equilátero.

Problema 2. Un entero positivo es *bisumado* si se puede escribir como suma de dos enteros positivos que tengan la misma suma de sus dígitos. Por ejemplo, 2012 es bisumado pues $2012 = 2005 + 7$ y tanto 2005 como 7 tienen suma de dígitos igual a 7. Encontrar todos los enteros positivos que no son bisumados.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Dado un conjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de enteros entre 0 y $2^n - 1$ inclusive, a cada uno de sus 2^n subconjuntos se les asigna la suma de sus elementos; en particular, el subconjunto vacío tiene suma 0. Si estas 2^n sumas dejan distintos residuos al dividirlas entre 2^n, se dice que el subconjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ es n-completo. Determinar, para cada n, la cantidad de conjuntos n-completos.

Problema 4. Sean a, b, c, d números enteros positivos tales que $a - b + c - d$ es impar y divide a $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$. Demostrar que $a - b + c - d$ divide a $a^n - b^n + c^n - d^n$ para todo entero positivo n.

Problema 5. Sea ABC un triángulo y sean P y Q los puntos de intersección de la paralela a BC por A con las bisectrices exteriores de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$, respectivamente. La perpendicular a BP por P y la perpendicular a CQ por Q se intersecan en R. Si I es el incentro de ABC, mostrar que $AI = AR$.

Problema 6. Demostrar que para todo entero positivo n existen n enteros positivos consecutivos tales que ninguno de ellos es divisible por la suma de sus dígitos.

OIM 2011

Problema 1. En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana. Cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene al aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicarlo por 2, o multiplicarlo por 3, o sumarle 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual a 2011 gana. Hallar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Problema 2. Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres números enteros no nulos x, y, z tales que

$$x + y + z = 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo y sean X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB respectivamente. Suponga que C_1, C_2, C_3 son circunferencias con cuerdas YZ, ZX, XY, respectivamente, tales que C_1 y C_2 se corten sobre la recta CZ y que C_1 y C_3 se corten sobre la recta BY. Suponga que C_1 corta a las cuerdas XY y ZX en J y M, respectivamente; que C_2 corta a las cuerdas YZ y XY en L e I, respectivamente; y que C_3 corta a las cuerdas YZ y ZX en K y N respectivamente. Demostrar que I, J, K, L, M, N están sobre una circunferencia.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AC \neq BC$, y sea O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.

Problema 5. Sean $x_1, \cdots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen $a_1, \cdots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 \geq (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^2.$$

Problema 6. Sean k y n enteros positivos, con $k \geq 2$. En una línea recta se tienen kn piedras de k colores diferentes de tal forma que n piedras de cada color. Un pasoconsiste en intercambiar de posición dos piedras adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr, con a lo sumo m pasos, que las n piedras de cada color queden seguidas si:

1. n es par,
2. n es impar y $k = 3$.

OIM 2010

Problema 1. Se tienen diez monedas indistinguibles puestas en línea. Se sabe que dos de ellas son falsas y ocupan posiciones consecutivas en la línea. Para cada conjunto de posiciones, se puede preguntar cuántas monedas falsas contiene. ¿Es posible determinar cuáles son las monedas falsas efectuando únicamente dos de estas preguntas, sin conocer la respuesta de la primera antes de formular la segunda?

Problema 2. Determinar si existen números enteros positivos a y b tales que todos los términos de la sucesión definida por $x_1 = 2010$, $x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}, n \geq 1,$$

sean enteros.

Problema 3. La circunferencia Γ inscrita al triángulo escaleno ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. La recta EF corta a la recta BC en G. La circunferencia de diámetro GD corta a Γ en R ($R \neq D$). Sean P y Q ($P \neq R$, $Q \neq R$) las intersecciones de BR y CR con Γ, respectivamente. Las rectas BQ y CP se cortan en X. La circunferencia circunscrita a CDE corta al segmento QR en M y la circunferencia circunscrita a BDF corta al segmento PR en N. Demostrar que las rectas PM, QN y RX son concurrentes.

Problema 4. Las medias aritmética, geométrica y armónica de dos números enteros positivos distintos son números enteros. Hallar el menor valor posible para la media aritmética.
Nota: Si a y b son números positivos, sus medias aritmética, geométrica y armónica son, respectivamente: $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$ y $\frac{2ab}{a+b}$.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD son perpendiculares. Sean O el circuncentro de $ABCD$, K la intersección de las diagonales, $L \neq O$ la intersección de las circunferencias circunscritas a OAC y OBD, y G la intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de $ABCD$. Probar que O, K, L y G están alineados.

Problema 6. Alrededor de una mesa circular sobre la que hay 28 floreros se sientan 12 personas. Dos personas pueden verse si y sólo si no hay ningún florero alineado con ellas. Probar que existen al menos dos personas que pueden verse.

OIM 2009

Problema 1. Sea n un natural mayor a 2. Supongamos que n islas están ubicadas en un círculo y que entre cada dos islas vecinas hay dos puentes, con las islas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ en orden de las manecillas del reloj.
Comenzando en la isla x_1, ¿de cuántas maneras se pueden recorrer los $2n$ puentes pasando por cada puente exactamente una vez?

Problema 2. Para cada entero positivo n se define $a_n = n + m$ donde m es el mayor entero tal que $2^{2^m} \leq n2^n$. Determinar qué enteros positivos no aparecen en la sucesión a_n.

Problema 3. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2 con el mismo radio, que se cortan en A y B. Sea P un punto sobre el arco AB de C_2 que está dentro de C_1. La recta AP corta a C_1 en C, la recta CB corta a C_2 en D y la bisectriz de $\angle CAD$ interseca a C_1 en E y a C_2 en L. Sea F el punto simétrico a D con respecto al punto medio de PE. Demostrar que existe un punto X que satisface $\angle XFL = \angle XCD = 30°$ y $CX = O_1O_2$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean I el incentro de ABC y P el otro punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con el circuncírculo de ABC. La recta PI interseca por segunda vez al circuncírculo de ABC en el punto J. Demostrar que los circuncírculos de los triángulos JIB y JIC son tangentes a IC y a IB, respectivamente.

Problema 5. La sucesión a_n está definida por $a_1 = 1$, $a_{2k} = 1 + a_k$ y $a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}}$, para todo entero $k \geq 1$.
Demostrar que todo número racional positivo aparece exactamente una vez en esta sucesión.

Problema 6. Alrededor de una circunferencia se marcan 6000 puntos y cada uno se colorea con uno de 10 colores dados, de manera tal que entre cualesquiera 100 puntos consecutivos siempre figuran los 10 colores. Hallar el menor valor k con la siguiente propiedad: Para toda coloración de este tipo existen k puntos consecutivos entre los cuales figuran los 10 colores.

OIM 2008

Problema 1. Se distribuyeron los números $1, 2, 3, \cdots 2008^2$ en un tablero 2008×2008, de modo que en cada casilla haya un número distinto. Para cada fila y cada columna del tablero se calcula la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos. Sea S la suma de los 4016 números obtenidos. Determine el mayor valor posible de S.

Problema 2. Sea ABC un triángulo escaleno y r la bisectriz externa del ángulo $\angle ABC$. Se consideran P y Q, los pies de las perpendiculares a la recta r que pasan por A y C respectivamente. Las rectas CP y AB se intersecan en M y las rectas AQ y BC se intersecan en N. Demuestre que las rectas AC, MN y r tienen un punto en común.

Problema 3. Sean m y n enteros tales que el polinomio $P(x) = x^3 + mx + n$ tiene la siguiente propiedad: si x e y son enteros y 107 divide a $P(x) - P(y)$, entonces 107 divide a $x - y$. Demuestre que 107 divide a m.

Problema 4. Demuestre que no existen enteros positivos x e y tales que

$$x^{2008} + 2008! = 21^y$$

Problema 5. Sea ABC un triángulo, y X, Y, Z puntos sobre los lados BC, AC, AB respectivamente. Sean A', B', C' los circuncentros correspondientes a los triángulos AZY, BXZ, CYX. Demuestre que

$$(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si las rectas AA', BB', CC' tienen un punto en común. Observación: para un triángulo cualquiera RST, denotamos su área por (RST).

Problema 6. En un partido de *biribol* se enfrentan dos equipos de cuatro personas cada uno. Se organiza un torneo de biribol en el que participan n personas, que forman equipos para cada partido (los equipos no son fijos). Al final del torneo se observó que cada dos personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales. ¿Para qué valores de n es posible organizar un torneo con tales características?

OIM 2007

Problema 1. Dado un entero positivo m, se define la sucesión $\{a_n\}$ de la siguiente manera:

$$a_1 = \frac{m}{2}, a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil, \text{ si } n \geq 1.$$

Determinar todos los valores de m para los cuales a_{2007} es el primer entero que aparece en la sucesión.

Problema 2. Sean ABC un triángulo con incentro I y Γ una circunferencia de centro I, de radio mayor al de la circunferencia inscrita y que no pasa por ninguno de los vértices. Sean X_1 el punto de intersección de Γ con la recta AB más cercano a B; X_2, X_3 los puntos de intersección de Γ con la recta BC siendo X_2 más cercano a B; y X_4 el punto de intersección de Γ con la recta CA más cercano a C. Sea K el punto de intersección de las rectas X_1X_2 y X_3X_4. Demostrar que AK corta al segmento X_2X_3 en su punto medio.

Problema 3. Dos equipos, A y B, disputan el territorio limitado por una circunferencia. A tiene n banderas azules y B tiene n banderas blancas ($n \geq 2$, fijo). Juegan alternadamente y A comienza el juego. Cada equipo, en su turno, coloca una de sus banderas en un punto de la circunferencia que no se haya usado en una jugada anterior. Cada bandera, una vez colocada, no se puede cambiar de lugar. Una vez colocadas las $2n$ banderas se reparte el territorio entre los dos equipos. Un punto del territorio es del equipo A si la bandera más próxima a él es azul, y es del equipo B si la bandera más próxima a él es blanca. Si la bandera azul más próxima a un punto está a la misma distancia que la bandera blanca más próxima a ese punto, entonces el punto es neutro (no es de A ni de B). Un equipo gana el juego si sus puntos cubren un área mayor que el área cubierta por los puntos del otro equipo. Hay empate si ambos cubren áreas iguales. Demostrar que, para todo n, el equipo B tiene estrategia para ganar el juego.

Problema 4. En un tablero cuadriculado de 19×19, una ficha llamada *dragón* da saltos de la siguiente forma: se desplaza 4 casillas en una dirección paralela a uno de los lados del tablero y 1 casilla en dirección perpendicular a la anterior. Se sabe que, con este tipo de saltos, el dragón puede moverse de cualquier casilla a cualquier otra. La *distancia dragoniana* entre dos casillas es el menor número de saltos que el dragón debe dar para moverse de una casilla a otra.
Sea C una casilla situada en una esquina del tablero y sea V la casilla vecina a C que le toca en un único punto. Demostrar que existe alguna casilla X del tablero tal que la distancia dragoniana de C a X es mayor que la distancia dragoniana de C a V.

Problema 5. Un número natural n es *atrevido* si el conjunto de sus divisores, incluyendo al 1 y al n, se puede dividir en tres subconjuntos tales que la suma de los elementos de cada subconjunto es la misma en los tres. ¿Cuál es la menor cantidad de divisores que puede tener un número atrevido?

Problema 6. Sea F la familia de todos los hexágonos convexos H tales que los lados opuestos de H son paralelos, y tres vértices cualesquiera de H se pueden cubrir con una franja de ancho 1. Determinar el menor número real l tal que cada uno de los hexágonos de la familia F se puede cubrir con una franja de ancho l.
Nota: Una franja de ancho l es la región del plano comprendida entre dos rectas paralelas que están a distancia l (incluidas ambas rectas paralelas).

OIM 2006

Problema 1. En el triángulo escaleno ABC, con $\angle BAC = 90°$, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta tangente en A a la circunferencia circunscrita corta a la recta BC en M. Sean S y R los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U. Demuestre que el triángulo UMN es isósceles.

Problema 2. Se consideran n números reales $a_1, a_2, \cdots a_n$ no necesariamente distintos. Sea d la diferencia entre el mayor y el menor de ellos y sea:

$$s = \sum_{i<j} \mid a_i - a_j \mid$$

Demuestre que:

$$(n-1)d \leq s \leq \frac{n^2 d}{4}$$

y determine las condiciones que deben cumplir estos n números para que se verifique cada una de las igualdades.

Problema 3. Los números $1, 2, 3, \cdots, n^2$ se colocan en las casillas de una cuadrícula de $n \times n$, en algún orden, un número por casilla. Una ficha se encuentra inicialmente en la casilla con el número n^2. En cada paso, la ficha puede avanzar a cualquiera de las casillas que comparten un lado con la casilla donde se encuentra. Primero, la ficha viaja a la casilla con el número 1, y para ello toma uno de los caminos más cortos (con menos pasos) entre la casilla con el número n^2 y la casilla con el número 1. Desde la casilla con el número 1 viaja a la casilla con el número 2, desde allí a la casilla con el número 3, y así sucesivamente, hasta que regresa a la casilla inicial, tomando en cada uno de los viajes el camino más corto. El recorrido completo le toma a la ficha N pasos. Determine el menor y mayor valor posible de N.

Problema 4. Determine todas las parejas (a, b) de enteros positivos tales que $2a + 1$ y $2b - 1$ sean primos relativos y $a + b$ divida a $4ab + 1$.

Problema 5. Dada una circunferencia Γ, considere un cuadrilátero $ABCD$ con sus cuatro lados tangentes a Γ, con AD tangente a Γ en P y CD tangente a Γ en Q. Sean X e Y los puntos donde BD corta a Γ, y M el punto medio de XY. Demuestre que $\angle AMP = \angle CMQ$.

Problema 6. Sea $n > 1$ un entero impar. Sean P_0 y P_1 dos vértices consecutivos de un polígono regular de n lados. Para cada $k \geq 2$, se define P_k como el vértice del polígono dado que se encuentra en la mediatriz de P_{k-1} y P_{k-2}. Determine para qué valores de n la sucesión $P_0, P_1, P_2, \cdots,$ recorre todos los vértices del polígono.

OIM 2005

Problema 1. Determine todas las ternas de números reales (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$xyz = 8$$
$$x^2y + y^2z + z^2x = 73$$
$$x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 = 98$$

Problema 2. Una pulga salta sobre puntos enteros de la recta numérica. En su primer movimiento salta desde el punto 0 y cae en el punto 1. Luego, si en un movimiento la pulga saltó desde el punto a y cayó en el punto b, en el siguiente movimiento salta desde el punto b y cae en uno de los puntos $b + (b-a) - 1$, $b + (b-a)$, $b + (b-a) + 1$.
Demuestre que si la pulga ha caído dos veces sobre el punto n, para n entero positivo, entonces ha debido hacer al menos t movimientos, donde t es el menor entero positivo mayor o igual que $2\sqrt{n}$.

Problema 3. Sea p mayor que 3 un número primo. Si

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^p} = \frac{n}{m}$$

donde el máximo común divisor de n y m es 1, demuestre que p^3 divide a n.

Problema 4. Dados dos enteros positivos a y b, se denota por $a\nabla b$ el residuo que se obtiene al dividir a entre b. Este residuo es uno de los números $0, 1, \cdots, b-1$. Encuentre todas las parejas de números (a, p) tales que p es primo y se cumple que

$$(a\nabla p) + (a\nabla 2p) + (a\nabla 3p) + (a\nabla 4p) = a + p$$

Problema 5. Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y A_1 un punto en el arco menor BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Sean A_2 y A_3 puntos en los lados AB y AC respectivamente tales que $\angle BA_1A_2 = \angle OAC$ y $\angle CA_1A_3 = \angle OAB$. Demuestre que la recta A_2A_3 pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 6. Dado un entero positivo n, en un plano se consideran $2n$ puntos alineados $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$. Cada punto se colorea de azul o de rojo mediante el siguiente procedimiento:
En el plano se trazan n circunferencias con diámetros de extremos A_i y A_j, disjuntas dos a dos. Cada A_k, $1 \leq k \leq 2n$, pertenece exactamente a una circunferencia. Se colorean los puntos de modo que los dos puntos de una misma circunferencia lleven el mismo color.
Determine cuántas coloraciones distintas de los $2n$ puntos se pueden obtener al variar las n circunferencias y la distribución de los colores.

OIM 2004

Problema 1. Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001 de acuerdo a las reglas siguientes:

- Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

Problema 2. Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

Problema 3. Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que

$$\mathrm{mcd}(a, n) = \mathrm{mcd}(b, n) = 1, k = a + b$$

Problema 4. Determinar todas las parejas (a, b), donde a y b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a + b$ y $201a + b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

Problema 5. Dado un triángulo escaleno ABC, se llaman A', B' y C' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C con los lados opuestos, respectivamente. Sea A'' la intersección de BC con la mediatriz de AA', B'' la intersección de AC con la mediatriz de BB' y C'' la intersección de AB con la mediatriz de CC'.
Probar que A'', B'' y C'' son colineales.

Problema 6. Para un conjunto H de puntos en el plano, se dice que un punto P del plano es un *punto de corte* de H si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en H tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P.
Dado un conjunto finito A_0 de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \cdots$ de la siguiente manera: para cualquier $j \geq 0$, A_{j+1} es la unión de A_j con el conjunto de todos los puntos de corte de A_j.
Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier $j \geq 1$ se tiene que $A_j = A_1$.

OIM 2003

Problema 1.

1. Se tienen dos sucesiones, cada una de 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas. Decida si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que los resultados obtenidos al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.

2. ¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?

Tanto en 1. como en 2., si la respuesta es afirmativa, explique cómo distribuiría los números, y si es negativa, justifique el porqué.

Problema 2. Sean C y D dos puntos de la semicircunferencia de diámetro AB tales que B y C están en los semiplanos distintos respecto de la recta AD. Denotemos M, N y P los puntos medios de AC, DB y CD, respectivamente. Sean O_A y O_B los circuncentros de los triángulos ACP y BDP. Demuestre que las rectas O_AO_B y MN son paralelas.

Problema 3. Pablo estaba copiando el siguiente problema:
Considere todas las sucesiones de 2004 números reales $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2003})$, tales que

$$x_0 = 1, 0 \leq x_1 \leq 2x_0, 0 \leq x_2 \leq 2x_1, \cdots, 0 \leq x_{2003} \leq 2x_{2002}$$

Entre todas estas sucesiones, determine aquella para la cual la siguiente expresión toma su mayor valor: $S = \cdots$.
Cuando Pablo iba a copiar la expresión de S le borraron la pizarra. Lo único que pudo recordar es que S era de la forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{2002} + x_{2003}$$

donde el último término, x_{2003}, tenía coeficiente $+1$, y los anteriores tenían coeficiente $+1$ ó -1. Demuestre que Pablo, a pesar de no tener el enunciado completo, puede determinar con certeza la solución del problema.

Problema 4. Sea $M = \{1, 2, \cdots, 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero k tal que el conjunto M tiene un subconjunto de k elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para ese valor máximo de k, halle la cantidad de subconjuntos de M, de k elementos, que tienen la propiedad mencionada.

Problema 5. En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados BC y CD respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP = CQ$. Se consideran puntos X e Y, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos AP y AQ respectivamente. Demuestre que, cualesquiera sean X e Y, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos BX, XY y DY.

Problema 6. Se definen las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, b_0 = 4, a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

OIM 2002

Problema 1. Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente $1, 2, \cdots, 2001, 2002$. Luego, se borran los que ocupan el primer lugar, cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma $3k + 1$. En la nueva lista se borran los números que están en los lugares de la forma $3k + 1$.
Se repite este proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿Cuál fue el último número que se borró?

Problema 2. Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano de los cuales no hay tres colineales, demuestre que para cada punto P del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a P en su interior, es par.

Problema 3. Un punto P es interior al triángulo equilátero ABC y cumple que $\angle APC = 120°$. Sean M la intersección de CP con AB y N la intersección de AP con BC. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo MBN al variar P.

Problema 4. En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior BD, con D sobre AC.
Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y sea M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Demuestre que $\angle EMD = \angle DMF$.

Problema 5. La sucesión de números reales $a_1, a_2, \cdots$ se define como:

$$a_1 = 56, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$$

para cada entero $n \geq 1$.
Demuestre que existe un entero k, $1 \leq k \leq 2002$, tal que $a_k < 0$.

Problema 6. Un policía intenta capturar a un ladrón en un tablero de 2001×2001. Ellos juegan alternadamente. Cada jugador, en su turno, debe moverse una casilla en uno de los tres sentidos $\downarrow, \rightarrow, \nwarrow$.
Si el policía se encuentra en la casilla de la esquina inferior derecha, puede usar su jugada para pasar directamente a la casilla de la esquina superior izquierda (el ladrón no puede hacer esta jugada).
Inicialmente el policía está en la casilla central y el ladrón está en la casilla vecina diagonal superior derecha al policía. El policía comienza el juego. Demuestre que:

1. El ladrón consigue moverse por lo menos 10000 sin ser capturado.

2. El policía posee una estrategia para capturar al ladrón.

Nota: El policía captura al ladrón cuando entra en la casilla en la que está el ladrón. Si el ladrón entra en la casilla del policía, no se produce captura.

OIM 2001

Problema 1. Decimos que un número natural n es çharrúa"si satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

- Todos los dígitos de n son mayores que 1.
- Siempre que se multipliquen cuatro dígitos de n, se obtiene un divisor de n.

Demostrar que para cada número natural k existe un número charrúa con más de k dígitos.

Problema 2. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene centro O y es tangente a los lados BC, AC y AB en los puntos X, Y y Z, respectivamente. Las rectas BO y CO intersectan a la recta YZ en los puntos P y Q, respectivamente.
Demostrar que si los segmentos XP y XQ tienen la misma longitud, entonces el triángulo ABC es isósceles.

Problema 3. Sean S un conjunto de n elementos y $S_1, S_2, \cdots, S_k$ subconjuntos de S $(k \geq 2)$, tales que cada uno de ellos tiene por lo menos r elementos.
Demostrar que existen i y j, con $1 \leq i < j \leq k$ tales que la cantidad de elementos comunes de S_i y S_j es mayor o igual que

$$r - \frac{nk}{4(k-1)}$$

Problema 4. Determinar el número máximo de progresiones aritméticas crecientes de tres términos que puede tener una sucesión $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ de $n \geq 3$ números reales.
Nota: Tres términos a_i, a_j, a_k de una sucesión de números reales forman una progresión aritmética creciente si $a_i < a_j < a_k$ y $a_j - a_i = a_k - a_j$.

Problema 5. En un tablero de 2000×2001 las casillas tienen coordenadas (x, y) con x, y enteros, $0 \leq x \leq 1999$ y $0 \leq y \leq 2000$. Una nave en el tablero se mueve de la siguiente manera: antes de cada movimiento, la nave está en una posición (x, y) y tiene una velocidad (h, v) donde h y v son enteros. La nave escoge una nueva velocidad (h', v') de forma que $h' - h$ sea igual a -1, 0 ó 1 y $v' - v$ sea igual a -1, 0 ó 1. La nueva posición de la nave será (x', y') donde x' es el resto de dividir $x + h'$ entre 2000 e y' es el resto de dividir $y + v'$ entre 2001.
Hay dos naves en el tablero: la marciana y la terrestre que quiere atrapar a la marciana. Inicialmente cada nave está en una casilla del tablero y tiene velocidad $(0, 0)$. Primero se mueve la nave terrestre y continúan moviéndose alternadamente.
¿Existe una estrategia que siempre le permita a la nave terrestre atrapar a la nave marciana, cualesquiera que sean las posiciones iniciales?
Nota: la nave terrestre, que siempre ve a la marciana, atrapa a la marciana si después de un movimiento suyo cae en la misma posición de la marciana.

Problema 6. Demostrar que es imposible cubrir un cuadrado de lado 1 con cinco cuadrados iguales de lado menos que $\frac{1}{2}$.

OIM 2000

Problema 1. Se construye un polígono regular de n lados ($n \geq 3$) y se enumeran sus vértices de 1 a n. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a n, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

1. El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.

2. Para cada vértice, todos los lados y diagonales que compartan dicho vértice tengan números diferentes.

Problema 2. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias, de centros O_1 y O_2 respectivamente, secantes en M y N. La recta t es tangente común a S_1 y S_2, más cercana a M. Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2, C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM trazada por B. Demostrar que M, D y C están alineados.

Problema 3. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$(x+1)^y - x^z = 1$$

para x, y, z enteros mayores que 1.

Problema 4. De una progresión aritmética infinita $1, a_1, a_2, \cdots$ de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita $1, b_1, b_2, \cdots$ de razón q. Encontrar los posibles valores de q.

Problema 5. Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo a las siguientes reglas:

1. En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4 o 5 piedras del montón.

2. En cada jugada se prohibe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

Pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida. Determinar cuál jugador tiene estrategia ganadora y encontrarla.

Problema 6. Un hexágono convexo se denomina *bonito* si tiene cuatro diagonales de longitud 1, cuyos extremos incluyen todos los vértices del hexágono.

1. Dado cualquier número k, mayor que 0 y menor o igual que 1, encontrar un hexágono bonito de área k.

2. Demostrar que el área de cualquier hexágono bonito es menor que $\frac{3}{2}$.

OIM 1999

Problema 1. Halle todos los enteros positivos que son menores que 1000 y cumplen con la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

Problema 2. Dadas dos circunferencias M y N, decimos que M biseca a N si la cuerda común es un diámetro de N.
Considere dos circunferencias fijas C_1 y C_2 no concéntricas.

1. Pruebe que existen infinitas circunferencias B tales que B biseca a C_1 y B biseca a C_2.

2. Determine el lugar geométrico de los centros de las circunferencias B.

Problema 3. Sean n puntos distintos, $P_1, P_2, \cdots, P_n$, sobre una recta del plano ($n \geq 2$). Se consideran las circunferencias de diámetro P_iP_j ($1 \leq i, j \leq n$) y coloreamos cada circunferencia con uno de k colores dados. Llamamos (n, k)-nube a esta configuración.
Para cada entero positivo k, determine todos los n para los cuales se verifica que toda (n, k)-nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color. Nota: Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

Problema 4. Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demuestre que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.

Problema 5. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

1. Pruebe que OA es perpendicular a PQ.

2. Si M es el punto medio de BC, pruebe que $AP^2 = 2(AD \cdot OM)$.

Problema 6. Sean A y B puntos del plano y C un punto de la mediatriz de AB. Se construye una sucesión $C_1, C_2, \cdots$ de la siguiente manera: $C_1 = C$, y para $n \geq 1$, si C_n no pertenece al segmento AB, C_{n+1} es el circuncentro del triángulo ABC_n.
Determine todos los puntos C tales que la sucesión $C_1, C_2, \cdots$ está definida para todo n y es periódica a partir de un cierto punto.
Nota: Una sucesión $C_1, C_2, \cdots$ es periódica a partir de cierto punto si existen enteros positivos k y p tales que $C_{n+p} = C_n$ para todo $n \geq k$.

OIM 1998

Problema 1. Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre sí anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que realiza el último trazo.
Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

Problema 2. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. AD corta a la circunferencia en un segundo punto Q. Demostrar que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si, y solamente si, $AC = BC$.

Problema 3. Hallar el mínimo número natural n con la siguiente propiedad: entre cualesquiera n números distintos, pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \cdots, 99\}$, se pueden elegir cuatro números diferentes a, b, c, d tales que $a + 2b + 3c = d$.

Problema 4. Alrededor de una mesa redonda están sentados representantes de n países $(n \geq 2)$, de modo que satisfacen la siguiente condición: si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha no pueden ser de un mismo país. Determinar, para cada n, el número máximo de personas que puede haber alrededor de la mesa.

Problema 5. Hallar el máximo valor posible de n para que existan puntos distintos $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ en el plano y números reales $r_1, r_2, \cdots, r_n$ de modo que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes P_i y P_j sea $r_i + r_j$.

Problema 6. Sea λ la raíz positiva de la ecuación $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Se define la sucesión $x_0, x_1, x_2, \cdots$ por:

$$x_0 = 1$$

$$x_{n+1} = [\lambda x_n], n = 0, 1, 2, \cdots$$

Hallar el residuo de la división de x_{1998} por 1998.
Nota: Los corchetes indican parte entera, o sea, $[x]$ es el único entero k tal que $k \leq x \leq k + 1$.

OIM 1997

Problema 1. Sea $r \geq 1$ un número real que cumple la siguiente propiedad:
Para cada pareja de números enteros positivos m y n, con n múltiplo de m, se tiene que $[nr]$ es múltiplo de $[mr]$. Probar que r es un número entero.
Nota: Si x es un número real, denotamos por $[x]$ el mayor entero menor o igual que x.

Problema 2. Con centro en el incentro I de un triángulo ABC se traza una circunferencia que corta en dos puntos a cada uno de los tres lados del triángulo: al segmento BC en D y P (siendo D el más cercano a B); al segmento CA en E y Q (siendo E el más cercano a C), y al segmento AB en F y R (siendo F el más cercano a A).
Sea S el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $EQFR$. Sea T el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $FRDP$. Sea U el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPEQ$. Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos FRT, DPU y EQS tienen un único punto común.

Problema 3. Sean $n \geq 2$ un número entero y D_n el conjunto de puntos (x, y) del plano cuyas coordenadas son números enteros con $-n \leq x \leq n$ y $-n \leq y \leq n$.

1. Se dispone de 3 colores; cada uno de los puntos de D_n se colorea con uno de ellos. Demostrar que sin importar cómo se haya hecho esta coloración, siempre hay dos puntos de D_n del mismo color tales que la recta que los contiene no pasa por ningún otro punto de D_n.

2. Encontrar una forma de colorear los puntos de D_n utilizando 4 colores de manera que si una recta contiene exactamente dos puntos de D_n, entonces esos dos puntos tienen colores distintos.

Problema 4. Sea n un entero positivo. Consideremos la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, donde los valores que pueden tomar las variables $x_1, x_2, \cdots x_n, y_1, y_2, \cdots y_n$ son únicamente 0 y 1. Sea $I(n)$ el número de $2n$-adas

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

para las cuales el valor de la suma es un número impar y sea $P(n)$ el número de $2n$-adas para las cuales la suma toma valor par. Probar que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$$

Problema 5. En un triángulo acutángulo ABC sean AE y BF dos alturas, y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en B se intersecan en un punto O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos M y N, respectivamente.
Sean: P, la intersección de BC con HN; R, la intersección de BC con OM; y S la intersección de HR con OP. Demostrar que $AHSO$ es un paralelogramo.

Problema 6. Sea $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_{1997}\}$ un conjunto de 1997 puntos en el interior de un círculo de radio 1, siendo P_1 el centro del círculo. Para cada $k = 1, \cdots, 1997$ sea x_k la distancia de P_k al punto de P más próximo a P_k y distinto de P_k. Demostrar que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9$$

OIM 1996

Problema 1. Sea n un número natural. Un cubo de arista n puede ser dividido en 1996 cubos cuyas aristas son también números naturales. Determine el menor valor posible de n.

Problema 2. Sea M el punto medio de la mediana AD del triángulo ABC (D pertenece al lado BC). La recta BM corta al lado AC en el punto N. Demuestre que AB es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo NBC si, y sólamente si, se verifica la igualdad:

$$\frac{BM}{MN} = \frac{(BC)^2}{(BN)^2}$$

Problema 3. Tenemos un tablero cuadriculado de $k^2 - k + 1$ filas y $k^2 - k + 1$ columnas, donde $k = p + 1$ y p es un número primo. Para cada primo p, de un método para distribuir números 0 y 1, un número en cada casilla del tablero, de modo que en cada fila haya exactamente k números 0 y además no haya ningún rectángulo de lados paralelos a los lados del tablero con números 0 en sus cuatro vértices.

Problema 4. Dado un número natural $n \geq 2$, considera todas las fracciones de la forma $\frac{1}{ab}$, donde a y b son números naturales, primos entre sí y tales que

$$a < b \leq n, a + b > n$$

Demuestra que para cada n la suma de estas fracciones es $\frac{1}{2}$.

Problema 5. Tres fichas A, B y C están situadas cada una en un vértice de un triángulo equilátero de lado n. Se ha dividido el triángulo en n^2 triangulitos equiláteros de lado 1. Inicialmente todas las líneas de la figura están pintadas de azul. Las fichas se desplazan por las líneas, pintando de rojo su trayectoria, de acuerdo con las dos reglas siguientes:

1. Primero se mueve A, después B, después C, después A y así sucesivamente, por turnos. En cada turno, cada ficha recorre exactamente un lado de un triángulito, de un extremo a otro.

2. Ninguna ficha puede recorrer un lado de un triangulito que ya esté pintado de rojo; pero puede descansar en un extremo pintado, incluso si ya hay otra ficha esperando ahí su turno.

Demuestra que para todo entero $n > 0$ es posible pintar de rojo todos los lados de los triangulitos.

Problema 6. Se tienen n puntos distintos $A_1, \cdots, A_n$ en el plano y a cada punto A_i se ha asignado un número real λ_i distinto de cero, de manera que $(A_iA_j)^2 = \lambda_i + \lambda_j$ para todos los i, j con $i \neq j$. Demuestra que

1. $n \leq 4$ y

2. si $n = 4$, entonces $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = 0$.

OIM 1995

Problema 1. Determine los posibles valores de las sumas de los dígitos de todos los cuadrados perfectos.

Problema 2. Sea n un entero positivo. Encuentra todos los números reales

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \geq 1$$

tales que:

- $x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{3}} + \cdots + x_n^{\frac{1}{n+1}} = n x_{n+1}^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x_{n+1}$

Problema 3. Sean r y s dos rectas ortogonales y que no están en el mismo plano. Sea AB su perpendicular común, donde A pertenece a r y B pertenece a s (*). Se considera la esfera de diámetro AB. Los puntos M de la recta r, y N de la recta s, son variables, con la condición de que MN sea tangente a la esfera en un punto T. Determine el lugar geométrico de T.
Nota (*): el plano que contiene a B y r es perpendicular a s.

Problema 4. En un tablero de $m \times n$ casillas se colocan fichas. Cada ficha colocada en el tablero "domina"todas las casillas de la fila, la columna y la diagonal (de arriba a la izquierda a abajo a la derecha) a la que pertenece. Determine el menor número de fichas deben colocarse para que queden "dominadas"todas las casillas del tablero.

Problema 5. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a BC, CA y AB en D, E y F respectivamente. Suponga que dicha circunferencia corta de nuevo a AD en su punto medio X, es decir, $AX = XD$. Las rectas XB y XC cortan de nuevo a la circunferencia inscrita en Y y en Z, respectivamente. Demuestre que $EY = FZ$.

Problema 6. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es circular si para cada p en $\mathbb{N}$ existe n en $\mathbb{N}$ con $n \leq p$ tal que

$$f^n(p) = p.$$

La función f tiene *grado de repulsión* $k > 0$ si para cada p en $\mathbb{N}$, $f^i(p) \neq p$ para toda $i = 1, 2, \ldots, \lfloor kp \rfloor$. Encuentra el mayor grado de repulsión que puede tener una función circular.

OIM 1994

Problema 1. Se dice que un número natural n es "sensato"si existe un entero r, con $1 \leq r \leq n-1$, tal que la representación de n en base r tiene todas sus cifras iguales. Por ejemplo, 62 y 15 son sensatos, ya que 62 es 222 en base 5 y 15 es 33 en base 4.

Demostrar que 1993 no es sensato pero 1994 sí lo es.

Problema 2. Sea un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, cuyos vértices se denotan consecutivamente por A, B, C y D. Se supone que existe una semicircunferencia con centro en AB, tangente a los otros tres lados del cuadrilátero.

- Demostrar que $AB = AD + BC$.
- Calcular, en función de $x = AB$ e $y = CD$, el área máxima que puede alcanzar un cuadrilátero que satisface las condiciones del enunciado.

Problema 3. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay una lámpara. Al ser tocada una lámpara cambian de estado ella misma y todas las lámparas situadas en la fila y la columna que ella determina (las que están encendidas se apagan y las apagadas se encienden). Inicialmente todas están apagadas. Demostrar que siempre es posible, con una sucesión adecuada de toques, que todo el tablero quede encendido y encontrar, en función de n, el número mínimo de toques para que se enciendan todas las lámparas.

Problema 4. Se dan los puntos A, B y C sobre una circunferencia Γ de manera que el triángulo ABC es acutángulo. Sea P un punto interior a Γ. Se trazan las rectas AP, BP y CP, que cortan de nuevo a la circunferencia en X, Y y Z. Determinar el punto P para que el triángulo XYZ sea equilátero.

Problema 5. Sean n y r dos enteros positivos. Se desea construir r subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ cada uno de ellos con k elementos exactamente y tales que, para cada entero x, $0 \leq x \leq n-1$, existen x_1 en A_1, x_2 en A_2, $\ldots$, x_r en A_r (un elemento en cada conjunto) con

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r.$$

Hallar el menor valor posible de k en función de n y r.

Problema 6. Demostrar que todo número natural $n \leq 2^{1000000}$ puede ser obtenido a partir de 1 haciendo menos de 1100000 sumas; más precisamente, hay una sucesión finita de números naturales

$$x_0, x_1, \ldots, x_k \text{ con } k \leq 1100000, x_0 = 1, x_k = n,$$

tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existen r, s, con $0 \leq r \leq s < i$ y $x_i = x_r + x_s$.

OIM 1993

Problema 1. Un número natural es capicúa si al escribirlo en notación decimal, se puede leer de igual forma tanto de izquierda a dercha como de derecha a izquierda, por ejemplo: 8, 23432, 6446.

Sean $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} \ldots$ todos los número capicúas. Para cada i sea $y_{i+1} = x_{i+1} - x_i$. ¿Cuántos números primos distintos tiene el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$?

Problema 2. Demuestre que para cualquier polígono convexo de área 1 existe un paraleogramo de área 2 que lo contiene.

Problema 3. Sea $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Halle todas las funciones $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ tales que:

- Si $x < y$ entonces $f(x) < f(y)$.
- $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$, para todos x, y en $\mathbb{N}^+$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo equilatero y ω su incírculo. Si D y E son puntos de los lados AB y AC, respectivamente, tales que DE es tangente a ω, demuestre que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

Problema 5. Sean P y Q dos puntos distintos del plano. Denotemos por $m(PQ)$ a la mediatriz del segmento PQ. Sea S un subconjunto finito del plano, con más de un elemento que satisface las siguientes propiedades:

1. Si P y Q son puntos distintos de S, entonces $m(PQ)$ interseca a S.
2. Si P_1Q_1, P_2Q_2 y P_3Q_3 son tres segmentos diferentes cuyos extremos son puntos de S, entonces ningún punto de S pertenece simultáneamente a las tres rectas $m(P_1Q_1)$, $m(P_2Q_2)$ y $m(P_3Q_3)$.

Determine el número de puntos que puede tener S.

Problema 6. Dos números enteros no negativos a y b son *cuates* si la expresión decimal $a + b$ consta solamente de ceros y unos. Sean A y B dos conjuntos infinitos de enteros no negativos, tales que B es el conjunto de todos los números que son *cuates* de todos los elementos de A, y A es el conjunto de todos los números que son *cuates* de todos los elementos de B. Pruebe que en uno de los conjuntos A o B hay infinitos pares de números x, y tales que $x - y = 1$.

OIM 1992

Problema 1. Para cada entero positivo n, definimos a_n como el último dígito del número

$$1 + 2 + \cdots + n.$$

Calcula

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{1992}.$$

Problema 2. Sean $a_1, \ldots a_n$ números reales tales que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Definimos la función

$$f(x) = \frac{a_1}{x + a_1} + \frac{a_2}{x + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{x + a_n}.$$

Encuentra la suma de las longitudes de los intervalos (disjuntos entre sí) de x en la recta real tales que $f(x) > 1$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo de lado 2, y ω su incírculo.

- Muestra que para todos los puntos P en ω, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 5$.
- Muestra que para todos los puntos P en ω, es posible construir un triángulo con lados PA, PB, PC, con área $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Problema 4. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números enteros tales que:

1. $a_0 = 0$ y $b_0 = 8$.
2. Para toda $n \geq 0$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$.
3. $a_n^2 + b_n^2$ es un cuadrado perfecto para toda $n \geq 0$.

Encuentra al menos dos valores de la pareja (a_{1992}, b_{1992}).

Problema 5. Se da la circunferencia $\mathcal{C}$ y los números positivos h y m de modo que existe un trapecio $ABCD$ inscrito en $\mathcal{C}$, de altura h y en el que la suma de las bases AB y CD es m. Construir el trapecio $ABCD$ con regla y compás.

Problema 6. En un triángulo ABC se construyen puntos A_1 en AB y A_2 en AC en las prolongaciones más allá de A, tales que $AA_1 = AA_2 = BC$. Se definen los puntos B_1, B_2, C_1, C_2 análogamente. Sea $[ABC]$ el área del triángulo ABC. Muestra que

$$[A_1A_2B_1B_2C_1C_2] \geq 13[ABC].$$

OIM 1991

Problema 1. A cada vértice de un cubo se asigna el valor de $+1$ o -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a cada vértice. ¿Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

Problema 2. Dos rectas perpendiculares dividen un cuadrado en cuatro partes, tres de las cuales tienen cada una área igual a 1. Demostrar que el área del cuadrado es cuatro.

Problema 3. Sea f una función creciente definida para todos los números reales x entre 0 y 1 (inclusive), tal que:

- $f(0) = 0$.
- $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{2}$.
- $f(1-x) = 1 - f(x)$.

Encuentra $f\left(\frac{18}{1991}\right)$.

Problema 4. Encontrar un número N de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con cinco cifras de N.

Problema 5. Sea $P(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2$. Un entero a es un valor de P si existen enteros b y c tales que $a = P(b, c)$.

- Determina cuántos elementos de $\{1, 2, \ldots, 100\}$ son valores de P.
- Muestra que el producto de dos valores de P es un valor de P.

Problema 6. Dados 3 puntos no alineados M, N y P, sabemos que M y N son puntos medios de dos lados de un triángulo y que P es el punto de intersección de las alturas de dicho triángulo. Construir el triángulo.
Reformulación: Construye un triángulo con regla y compás dado su ortocentro y puntos medios de dos de sus lados.

OIM 1990

Problema 1. Sea f una función en los enteros no negativos tal que:

1. Si n es de la forma $2^j - 1$, entonces $f(n) = 0$.
2. Si n no es de la forma $2^j - 1$, entonces $f(n+1) = f(n) - 1$.

Muestra que para todo entero no negativo n, existe un entero no negativo k tal que $f(n) + n = 2^k - 1$. También, calcula $f(2^{1990})$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con incentro I, y sean D, E, F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA, y AB, respectivamente. Sea P el punto de intersección de AD con el incírculo (distinto de D). Si M es el punto medio de EF, muestra que $PIMD$ es cíclico, o que los puntos caen sobre una misma recta.

Problema 3. Sea $f(x) = (x+b)^2 - c$, con b y c enteros.

- Si p es un primo tal que p divide a c pero p^2 no divide a c, muestra que para toda n, p^2 no divide a $f(n)$.
- Sea q un primo impar que no divide a c. Si q divide a $f(n)$ para algún entero positivo n, muestra que para todo entero positivo r, existe un entero positivo n' tal que q^r divide a $f(n')$.

Problema 4. Sea $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con diámetro AB, y sea t la tangente a $\mathcal{C}_1$ por B. Sea M otro punto en $\mathcal{C}_1$ distinto a A y B. Se construye la circunferencia $\mathcal{C}_2$, tangente a $\mathcal{C}_1$ en M y tangente a t.

- Encuentra el punto de tangencia P de $\mathcal{C}_2$ con t, y encuentra el lugar geométrico de el centro de $\mathcal{C}_2$ mientras M varía sobre $\mathcal{C}_1$.
- Muestra que existe una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias $\mathcal{C}_2$.

Nota: dos circunferencias son ortogonales si las tangentes a uno de sus puntos de intersección son perpendiculares.

Problema 5. Sean A y B dos vértices opuestos de un tablero de ajedrez de $n \times n$. En cada cuadrito de 1×1 se traza la diagnonal paralela a AB, creando $2n^2$ triángulos iguales. Una ficha se mueve de A a B sobre las líneas del tablero, pasando a lo más una vez por cada segmento. Cada vez que la ficha pasa por un segmento, se pone una semilla dentro de los triángulos que tienen a ese segmento como lado. Después de llegar a B, hay exactamente dos semillas en cada uno de los $2n^2$ triángulos del tablero. ¿Para cuáles valores de n es posible esto?

Problema 6. Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales. Muestra que si la gráfica de f es tangente a el eje x, entonces todas las raíces de f son racionales.

OIM 1989

Problema 1. Determinar todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x + y - z = -1,$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1,$$
$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1.$$

Problema 2. Sean x, y, z números reales tales que $0 < z < y < z < \frac{\pi}{2}$. Muestra que

$$\frac{\pi}{2} + 2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z > \sin 2x \sin 2y \sin 2z.$$

Problema 3. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que:

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{16}.$$

Problema 4. El incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados AC y BC en los punto M y N, respectivamente. Las bisectrices de los ángulos en A y B cortan a MN en los puntos P y Q. Sea I el incentro de el triángulo ABC. Muestra que

$$MP \cdot IA = BC \cdot IQ.$$

Problema 5. Sea f una función desde los enteros positivos, tal que

- $f(1) = 1$.
- $f(2n + 1) = f(2n) + 1$.
- $f(2n) = 3f(n)$.

Determinar el conjunto de valores que toma f.

Problema 6. Mostrar que hay una infinidad de pares de números naturales que satisfacen la ecuación

$$2x^2 - 3x - 3y^2 - y + 1 = 0.$$

OIM 1985

Problema 1. Halle todas las ternas de enteros (a, b, c) tales que:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 24 \\ a^2+b^2+c^2 &= 210 \\ abc &= 440 \end{aligned}$$

Problema 2. Sea P un punto interior del triángulo equilátero $\triangle ABC$ tal que $PA = 5$, $PB = 7$, $PC = 8$. Hallar la longitud de los lados del triángulo ABC.

Problema 3. Encontrar todas las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación $4x^4-ax^3+bx^2-cx+5 = 0$, sabiendo que son reales, positivas y que:

$$\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8} = 1.$$

Problema 4. Si $x \neq 1$, $y \neq 1$, $x \neq y$, y

$$\frac{yz-x^2}{1-x} = \frac{xz-y^2}{1-y},$$

muestra que ambas fracciones son iguales a $x+y+z$.

Problema 5. A cada número entero positivo n se le asigna un número entero no negativo $f(n)$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- $f(rs) = f(r) + f(s)$
- $f(n) = 0$, si el primer dígito (de derecha a izquierda) de n es 3.
- $f(10) = 0$.

Encuentra $f(1985)$. Justifica tu respuesta.

Problema 6. Dado un triángulo agudo ABC, sean D, E y F puntos de las rectas BC, AC y AB respectivamente. Si las rectas AD, BE y CF pasan por O, el centro de la circunferencia del triángulo ABC, cuyo radio es R, demostrar que

$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF} = \frac{2}{R}$$